

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

INSTITUTUL POLITEHNIC — BUCUREȘTI

MARIANA CRAIU

VASILE V. TĂNASE

ANALIZĂ MATEMATICĂ



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Referent științific: Acad. GH. MIHOC

Redactor: GABRIELA ILIESCU
Tehnoredactor: OPRIȘEANU ELENA
Coperta: N. SÎRBU

CAPITOLUL I

MULTIMI. STRUCTURI. FUNCȚII

§ 1. MULTIMI

În matematică lucrăm cu elemente ce au în comun anumite proprietăți sau care se găsesc în raporturi bine determinate între ele. Aceste elemente le notăm prin simboluri $a, b, \dots$ sau $x, y, \dots$.

Cînd scriem $x = y$ înțelegem prin aceasta că elementele x și y coincid. Dacă cele 2 elemente sînt diferite notăm $x \neq y$.

Obiectele sau elementele ce au în comun o anumită proprietate vom spune că formează o *mulțime*.

Dacă A este o mulțime și x este un element din mulțimea A spunem că x aparține mulțimii A și notăm $x \in A$.

Dacă A și B sînt două mulțimi și dacă orice element din mulțimea B este element în mulțimea A spunem că B este inclusă în A sau că B este *submulțime a mulțimii* A și notăm $B \subset A$.

Prin definiție mulțimile A și B sînt egale dacă: $A \subset B$ și $B \subset A$.

Dacă se dă o mulțime de elemente A și o proprietate $\mathfrak{A}$ pe care o au numai anumite elemente din mulțimea A atunci notăm submulțimea formată cu aceste elemente prin $\{x \in A \mid \mathfrak{A}\}$.

Mulțimea fără nici un element o numim mulțime vidă și o notăm $\emptyset$.

Mulțimea formată dintr-un singur element $a \in A$ o notăm prin $\{a\}$.

Dacă A este o mulțime, toate submulțimile mulțimii A formează o altă mulțime pe care o notăm $\mathfrak{A}(A)$.

1. Operații cu mulțimi

1. Fie $A \subset B$. Să considerăm mulțimea elementelor din B ce nu aparțin mulțimii A ; vom nota această mulțime cu $\mathbf{C}_B A$ și o numim *complementara* mulțimii A (sau *diferența* mulțimilor B și A).

Complementara are proprietățile:

$$1. \ a) \ \mathbf{C}_A A = \emptyset, \quad 1. \ b) \ \mathbf{C}_{\emptyset} A = A, \quad 1. \ c) \ \mathbf{C}_B(\mathbf{C}_B A) = A$$

2. Dacă $A \in \mathfrak{A}(E)$ și $B \in \mathfrak{A}(E)$ definim mulțimea

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

pe care o numim *reuniunea* mulțimilor A și B .

Proprietățile reuniunii sînt:

$$2.a) A \cup B = B \cup A \quad (\text{comutativitate})$$

$$2.b) (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad (\text{asociativitate})$$

$$2.c) A \cup \emptyset = A, \quad A \cup E = E$$

3. Dacă $A \in \mathfrak{A}(E)$ și $B \in \mathfrak{A}(E)$ numim *intersecție* a celor două mulțimi, mulțimea:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Proprietățile intersecției sînt:

$$3.a) A \cap B = B \cap A \quad (\text{comutativitate})$$

$$3.b) A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (\text{asociativitate})$$

$$3.c) A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cap E = A$$

$$3.d) \mathbf{C}_E(A \cap B) = \mathbf{C}_E A \cup \mathbf{C}_E B \quad (\text{relația De Morgan})$$

$$3.e) \mathbf{C}_E(A \cup B) = \mathbf{C}_E A \cap \mathbf{C}_E B \quad (\text{relația De Morgan})$$

Cele două operații de reuniune și intersecție sînt legate între ele prin distributivitatea uneia față de cealaltă, adică

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Dacă $A \in \mathfrak{A}(E)$ și $B \in \mathfrak{A}(E)$ numim *produs cartezian* a celor 2 mulțimi, mulțimea perechilor:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}.$$

Produsul cartezian a 2 mulțimi are proprietățile:

$$4.a) A \times \emptyset = \emptyset, \quad A \times B \neq B \times A.$$

$$4.b) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

$$4.c) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C).$$

Produsul cartezian pentru mai mult de două mulțimi se definește prin:

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

Proprietățile operațiilor cu mulțimi se demonstrează avînd în vedere definiția egalității a 2 mulțimi.

Vom demonstra spre exemplificare proprietățile: 3.e) și 4.b)

$$3.e) \text{ Arătăm } \mathbf{C}_E(A \cup B) \subset \mathbf{C}_E A \cap \mathbf{C}_E B.$$

$$x \in \mathbf{C}_E(A \cup B) \rightarrow x \notin A \cup B \rightarrow x \notin A \text{ și}$$

$$x \notin B \rightarrow x \in \mathbf{C}_E A \text{ și } x \in \mathbf{C}_E B \rightarrow x \in \mathbf{C}_E A \cap \mathbf{C}_E B.$$

Invers dacă: $x \in \mathbf{C}_E A \cap \mathbf{C}_E B$ rezultă $x \in \mathbf{C}_E A$ și $x \in \mathbf{C}_E B \rightarrow x \notin A$ și $x \notin B \rightarrow x \notin A \cup B \rightarrow x \in \mathbf{C}_E(A \cup B)$.

4.b) Arătăm $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$.

Dacă $x \in (A \cup B) \times C$ el este de forma $x = (y, z)$, $y \in A \cup B$ și $z \in C \rightarrow y \in A$ sau $y \in B \rightarrow (y, z) \in A \times C$ sau $(y, z) \in B \times C$.

Invers se demonstrează în același mod. Din cele două incluziuni rezultă egalitatea mulțimilor.

Exemple de mulțimi

I. Mulțimea numerelor reale $\mathbf{R}$.

Definiția 1.1 Cîmpul sau corpul numerelor reale $\mathbf{R}$ este o mulțime în care sînt definite operațiile:

a) de adunare și înmulțire prin care se asociază perechii (x, y) de elemente numere reale din $\mathbf{R}$, numărul real $x + y$ respectiv numărul real $x \cdot y$.

b) de ordine $x \leq y$ (x este mai mic sau egal cu y) între elementele mulțimii $\mathbf{R}$ cu proprietățile:

$$a_1) x + (y + z) = (x + y) + z \quad (\text{asociativitate})$$

$$a_2) x + y = y + x \quad (\text{comutativitate})$$

$a_3)$ există elementul $0 \in \mathbf{R}$ (element neutru) astfel încît $0 + x = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

$a_4)$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există un element $(-x) \in \mathbf{R}$ (simetric) astfel încît $x + (-x) = 0$.

$$a_5) x(yz) = (xy)z \quad (\text{asociativitate})$$

$$a_6) xy = yx \quad (\text{comutativitate})$$

$a_7)$ există în $\mathbf{R}$ un element $1 \neq 0$ astfel ca $1 \cdot x = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

$a_8)$ pentru orice $x \neq 0$ în $\mathbf{R}$ există un element $x^{-1} \in \mathbf{R}$ astfel încît $x \cdot x^{-1} = 1$.

$a_9)$ $x(y + z) = xy + xz$ (distributivitatea înmulțirii față de adunare).

$b_1)$ dacă $x \leq y$ și $y \leq z \rightarrow x \leq z$

$b_2)$ dacă $x \leq y$ și $y \leq x \rightarrow x = y$

$b_3)$ pentru orice 2 elemente x, y din $\mathbf{R}$ sau $x \leq y$ sau $y \leq x$

$b_4)$ dacă $x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z$

$b_5)$ dacă $x \geq 0$ și $y \geq 0 \rightarrow xy \geq 0$.

Datorită proprietăților $b_1) - b_5)$ pe care le îndeplinește mulțimea $\mathbf{R}$ spunem că $\mathbf{R}$ este un cîmp ordonat.

Relația $x \leq y$ și $x \neq y$ se scrie sub forma $x < y$ sau $y > x$.

Dintre mulțimile de numere reale un loc deosebit va fi ocupat de mulțimile:

$$(a, b) = \{x, x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}, \quad (\text{interval})$$

$$[a, b] = \{x, x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}, \quad (\text{segment})$$

$$[a, b) = \{x, x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\} \quad (\text{semiinterval})$$

Mulțimea $\mathbf{R}$ verifică de asemenea următoarele axiome:

Axioma lui Arhimede: pentru orice pereche x, y de numere reale din $\mathbf{R}$, pentru care $x > 0$, $y \geq 0$ există un număr natural n , astfel încît $y \leq nx$.

Axioma de compunere a intervalelor: dacă $[a_n, b_n]_{n \in \mathbf{N}}$ este un șir de segmente astfel ca $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq b_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, intersecția acestor segmente nu este vidă.

2. Mulțimea extinsă a numerelor reale

Definiția 2.1. Prin mulțimea extinsă a numerelor reale se înțelege mulțimea $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ unde $(-\infty)$ și ∞ sînt 2 simboluri distincte. $\bar{\mathbf{R}}$ devine o mulțime ordonată cu ordinea din $\mathbf{R}$ dacă punem $-\infty < \infty$ și $-\infty < x < \infty$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Mulțimi remarcabile din $\bar{\mathbf{R}}$ sînt:

$$(a, b) = \{x, x \in \bar{\mathbf{R}} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x, x \in \bar{\mathbf{R}} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x, x \in \bar{\mathbf{R}} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x, x \in \bar{\mathbf{R}} \mid a < x \leq b\}.$$

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ spunem că aceste mulțimi sînt *mărginite*. Dacă $a \in \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ sau $b \in \bar{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ spunem că mulțimile sînt *nemărginite*. Cele două simboluri $-\infty$ și ∞ operează astfel:

$$\infty + x = x + \infty = \infty$$

$$(-\infty) + x = x - \infty = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$-(\infty) = -\infty, -(-\infty) = \infty.$$

$$\infty + (-\infty) \text{ și } (-\infty) + \infty \text{ nu sînt definite.}$$

Pentru $x \in \mathbf{R}$ și $x > 0$ obținem

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty, (-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

Pentru $x \in \mathbf{R}$ și $x < 0$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty, (-\infty) \cdot x = \infty.$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$$\infty \cdot 0 \text{ și } (-\infty) \cdot 0 \text{ nu sînt definite.}$$

Numerele reale pot fi reprezentate ca puncte ale unei drepte numită dreaptă reală. Alegem o dreaptă L și pe ea un punct 0 în dreptul căruia plasăm elementul 0 (zero). Alegem de asemenea o unitate de măsură și la dreapta lui 0 așezăm elementul r ($r > 0$) la distanța de r unități. La distanța de r unități la stînga lui 0 așezăm numărul $(-r)$ ($r > 0$). Am pus astfel în

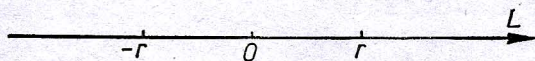


Fig. 1

corespondență fiecărui număr real cîte un punct pe dreapta reală; corespondență ce are proprietățile:

— fiecărui număr real îi corespunde un punct și numai un punct al dreptei L ;

— la două numere diferite corespund întotdeauna două puncte diferite;

— la fiecare punct al dreptei reale L corespunde un număr real.

O asemenea corespondență se numește *bijectivă* (figura 1).

3. Mulțimi majorate, minorate. Margine superioară.

Definiția 3.1. O submulțime $A \subset \mathbf{R}$ este majorată (minorată) dacă există $b \in \mathbf{R}$ astfel încît $x \leq b$ ($x \geq b$) pentru orice $x \in A$.

Elementul „ b ” se numește majorant al mulțimii A . El nu este unic.

Dacă există un majorant (minorant) în mulțimea A , acesta este *maximul* (*minimul*) mulțimii A .

Astfel mulțimea $(a, b] \subset \mathbf{R}$ este mărginită și admite ca maxim pe b ; nu admite minim dar este minorată.

Definiția 4.1. Numim marginea superioară exactă pentru mulțimea A ($\sup A$), marginea inferioară a majoranților ei și margine inferioară exactă, marginea superioară a minoranților ei.

Are loc:

Teorema 1.1. Orice parte nevidă majorată din $\mathbf{R}$ înzestrată cu relația de ordine are o margine superioară exactă (și orice parte nevidă minorată din $\mathbf{R}$ are o margine inferioară exactă).

Marginea superioară exactă M are proprietățile:

- 1) pentru orice $x \in A$, $A \subset \mathbf{R}$, $x \leq M$
- 2) pentru orice $M_1 < M$ există $x \in A$ astfel încît $M_1 < x \leq M$.

Marginea inferioară exactă m are proprietățile:

- 3) pentru orice $x \in A$, $A \subset \mathbf{R}$, $x \geq m$
- 4) pentru orice $m_1 > m$ există $x \in A$ astfel încît $m \leq x < m_1$.

Spații liniare

Vom nota prin K unul din corpurile $\mathbf{R}$ (al numerelor reale) și $\mathbf{C}$ (al numerelor complexe).

Definiție. Se numește spațiu vectorial (față de corpul K) o mulțime X de elemente în care este definită o operație „+” de adunare între elemente

din X și o operație de înmulțire $\cdot$ între elementele din X și elementele din K , operații care verifică proprietățile:

$$I_1) x + y = y + x \text{ (comutativitate), } x, y \in X$$

$$I_2) (x + y) + z = x + (y + z) \text{ (asociativitate), } x, y, z \in X$$

$$I_3) \text{ există } 0 \in X \text{ astfel încât}$$

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad (\forall) x \in X.$$

$$I_4) (\forall) x \in X \text{ există } x' \in X \text{ astfel încât}$$

$$x + x' = x' + x = 0$$

$$II_1) 1 \cdot x = x, \quad x \in X$$

$$II_2) \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \quad x \in X, \alpha, \beta \in K.$$

$$II_3) (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \alpha, \beta \in K, x \in X$$

$$II_4) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \alpha \in K, x, y \in X$$

Elementele spațiului X se numesc puncte sau vectori.

Exemple

1) Mulțimea $\mathcal{Q}_n$, a polinoamelor de grad „ n ” cu coeficienți reali formează un spațiu liniar față de $K = \mathbf{R}$.

2) Mulțimea $\mathcal{M}$ a matricilor 2×2 față de corpul $K = \mathbf{R}$ formează de asemenea un spațiu vectorial.

Definiția. Un spațiu liniar X se numește *spațiu liniar normat* sau *spațiu vectorial normat* dacă se definește o funcție $\| \cdot \|: X \rightarrow \mathbf{R}^+$ cu proprietățile:

$$1) \|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$$

$$2) \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$3) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad \alpha \in K.$$

Această funcție se numește *normă*.

În cele ce urmează ne vom ocupa de un spațiu liniar particular.

II. Spațiul euclidian $\mathbf{R}^k$

Definiția 5.1. Mulțimea formată din grupe ordonate de câte k numere reale o numim mulțime $\mathbf{R}^k$.

Astfel

$$\mathbf{R}^k = \{x, x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, k\}$$

Se observă că $\mathbf{R}^k = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \dots \times \mathbf{R}$ ceea ce justifică notația.

Elementele mulțimii $\mathbf{R}^k$ se numesc *puncte* sau *vectori*.

În mulțimea $\mathbf{R}^k$ definim operațiile de adunare a vectorilor $(+)$ și de înmulțirea vectorilor cu numere reale $(\cdot)$ astfel:

$$1. \text{ dacă } x \in \mathbf{R}^k \text{ și } y \in \mathbf{R}^k, x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$$

$$2. \text{ dacă } x \in \mathbf{R}^k \text{ și } \alpha \in \mathbf{R}; \alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k).$$

Operațiile definite mai sus au proprietățile $I_1 - I_4, II_1 - II_4$ ale spațiului liniar.

Putem construi un model geometric al spațiului $\mathbf{R}^2(\mathbf{R}^3)$ asemănător dreptei reale.

Vom considera în plan 2 drepte reale perpendiculare. Notăm punctul lor de intersecție cu O . Alegem pe fiecare din aceste drepte câte un punct M_1 respectiv M_2 astfel încât O, M_1, M_2 să se succedă în sens direct (sensul invers acelor unui ceasornic).

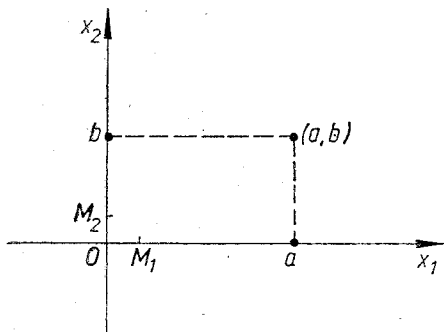


Fig. 2

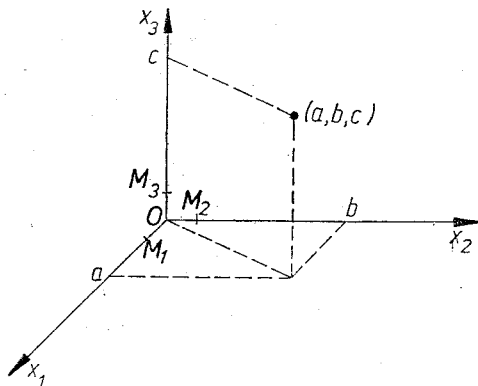


Fig. 3

Dreapta care trece prin O și M_i o notăm axa $x_i (i = 1, 2)$.

Fie un element $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Așezăm numărul real a pe axa Ox_1 după convenția făcută la dreapta reală și numărul real b pe axa Ox_2 . Ducând paralele la axe prin aceste puncte obținem imaginea elementului (a, b) (fig. 2). La fel în $\mathbf{R}^3$ (fig. 3).

În mulțimea $\mathbf{R}^k$ definim și operația de produs scalar a doi vectori, astfel:

3. dacă $x \in \mathbf{R}^k$ și $y \in \mathbf{R}^k$ atunci

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Operația de *produs scalar* are proprietățile:

3.1. $\langle x, x \rangle \geq 0$

3.2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$

3.3. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$

3.4. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

3.5. $\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle, \alpha \in \mathbf{R}$.

Cu ajutorul produsului scalar definim pentru orice vector $x \in \mathbf{R}^k$, un număr real, numit *norma* (lungimea) *vectorului* ($\|x\|$) astfel:

$$4. \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Norma vectorului din $\mathbf{R}^k$ are proprietățile:

4.1. $\|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \rightarrow x = 0$

4.2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

4.3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Demonstrațiile proprietăților 1.1—4.3 sînt aplicații ale definiției operațiilor cu vectori din $\mathbf{R}^k$ și le vom lăsa pe seama cititorului. Vom demonstra numai proprietatea 4.3.

Pentru aceasta fie $\sum_{i=1}^k (\lambda x_i + y_i)^2 \geq 0$ sau

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^k x_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^k x_i y_i + \sum_{i=1}^k y_i^2 \geq 0.$$

Aplicînd semnul trinomialului obținem:

$$\left(\sum_{i=1}^k x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^k x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^k y_i^2$$

sau încă $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Din 4.3.,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

de unde rezultă relația cerută.

Spațiul vectorial $\mathbf{R}^k$ în care s-a definit produsul scalar cu proprietățile III.1—III.5 devine un spațiu liniar normat (spațiul euclidian).

Observație. În spațiul $\mathbf{R}^k$ se pot introduce și alte norme astfel dacă $x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k$ notăm

$$|x| = \sum_{i=1}^k |x_i|$$

și aceasta verifică proprietățile (4.1)—(4.3) ale normei.

Această normă nu a fost însă construită cu ajutorul produsului scalar.

§ 2. FUNCȚII ÎN $\mathbf{R}^n$

Definiția 1.2. Prin aplicație (funcție) f a mulțimii X în Y înțelegem o regulă care asociază fiecărui element $x \in X$ un element $y \in Y$. Notăm valorile funcției prin $y = f(x)$.

Exemple de funcții

1. Fie $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = y$. O asemenea funcție o vom numi *funcție reală de variabilă reală*.

2. Fie $f: A \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = y, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in A.$$

Funcția f se va numi în acest caz *funcție reală de variabilă vectorială*.

3. Fie $f: A \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^m$ definită prin:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_m(t)), t \in A \subset \mathbf{R}.$$

Această funcție se numește funcție *vectorială de variabilă reală*.

4. Fie $f: A \subset \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^m$ definită prin:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_k), f_2(x_1, \dots, x_k), \dots, f_m(x_1, \dots, x_k))$$

care asociază fiecărui vector din A un vector din $\mathbf{R}^m$. Această funcție o numim funcție *vectorială de variabilă vectorială*.

Aplicația f a mulțimii X în Y este *injectivă* dacă $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$ oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$.

Aplicația f a mulțimii X în Y este *surjectivă* dacă fiecare element din Y este imaginea unui element din X .

O aplicație injectivă și surjectivă este *bijectivă*.

Presupunem că f este o bijecție; în acest caz vom nota cu $f^{-1}(y)$ elementul $x \in X$ pentru care $f(x) = y$. f^{-1} astfel definită aplică mulțimea Y în X și se numește aplicația inversă lui f sau funcție inversă.

Fie $A \subset X$ și f o aplicație a lui X în Y ; notăm

$$f(A) = \{y, y \in Y \mid (\exists) x \in A, y = f(x)\}.$$

Numim mulțimea $f(A)$, imaginea prin aplicația f a mulțimii A și considerăm aplicația definită pe mulțimea $\mathfrak{A}(A)$ cu valori în $\mathfrak{A}(Y)$.

Proprietăți:

- 1) $f(\emptyset) = \emptyset$
- 2) dacă $A \subset B \rightarrow f(A) \subset f(B)$
- 3) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- 4) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

În mod asemănător dacă $B \subset Y$ notăm mulțimea:

$$f^{-1}(B) = \{x, x \in X \mid f(x) \in B\}$$

și o numim imaginea inversă a mulțimii $B \subset Y$ prin aplicația f .

Proprietăți:

- 1') $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
- 2') dacă $A \subset B \rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
- 3') $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
- 4') $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
- 5') $f^{-1}(fA) = A$ și $f(f^{-1}B) = B$.

Vom demonstra numai două din aceste proprietăți celelalte rămân ca exerciții pentru cititori. Metoda de demonstrare se bazează pe definiția egalității a 2 mulțimi.

Demonstrăm 3) și 4')

3) Fie $y \in f(A \cup B) \rightarrow$ există $x \in A \cup B$ cu $f(x) = y \rightarrow x \in A$ sau $x \in B \rightarrow f(x) \in f(A)$ sau $f(x) \in f(B) \rightarrow y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Invers fie $y \in f(A) \cup$

$\cup f(B) \rightarrow y \in f(A)$ sau $y \in f(B) \rightarrow$ există $x \in A$ sau $x \in B$ cu $f(x) = y \rightarrow x \in A \cup B$ cu $f(x) = y \rightarrow y \in f(A \cup B) \rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ ceea ce arată egalitatea mulțimilor.

4') Fie $x \in f^{-1}(A \cap B) \rightarrow f(x) \in A \cap B \rightarrow f(x) \in A$ și $f(x) \in B \rightarrow x \in f^{-1}(A)$ și $x \in f^{-1}(B) \rightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Invers fie $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \rightarrow x \in f^{-1}(A)$ și $x \in f^{-1}(B) \rightarrow f(x) \in A$ și $f(x) \in B \rightarrow f(x) \in A \cap B \rightarrow x \in f^{-1}(A \cap B)$. Fie X, Y, Z mulțimi și $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$.

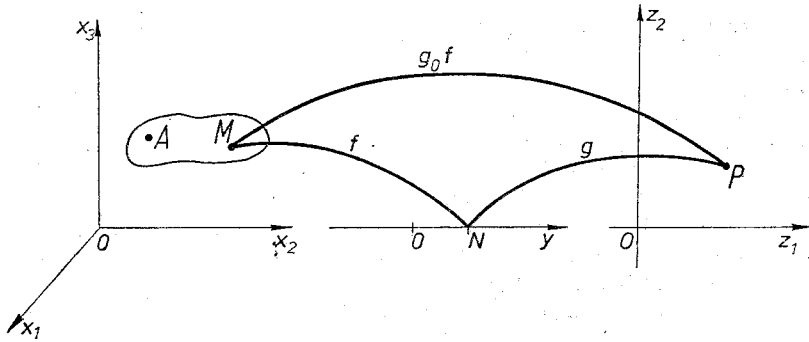


Fig. 4

Definiția 2.2. Numim compunere a aplicațiilor f și g și notăm $g \circ f$, aplicația definită în X cu valori în Z , după regula:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exemple:

1) Fie $f: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ și $g: B \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$.

O imagine a funcției compuse $g \circ f$ este reprezentată în figura 4

2) Fie $f: \mathbb{R} \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}^2$ și $g: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Compunerea funcțiilor f și g este reprezentată în figura 5

Compunerea funcțiilor este asociativă deci:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

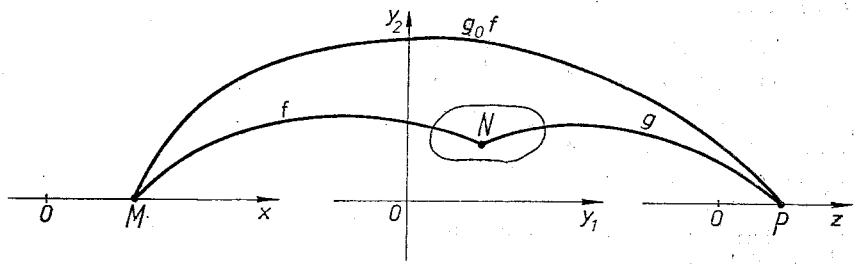


Fig. 5

Definiția 3.2. Dacă f este o bijecție a mulțimii X în Y , numim bijecție inversă și notăm f^{-1} funcția $f^{-1}: Y \rightarrow X$ astfel încât $f^{-1} \circ f = I_x$ unde I_x este aplicația identică corespunzătoare mulțimii X .

Exemplu: Funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ prin $f(x) = \text{sh } x$ unde $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

este o bijecție deoarece este:

— injectivă: (din $\frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = \frac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2}$ rezultă $e^{2x_1} = e^{2x_2}$ deci $x_1 = x_2$),

— surjectivă (ia toate valorile din $\mathbf{R}$).

Pentru a determina bijecția inversă notăm $f(x) = y$ și exprimăm pe x în funcție de y :

$$2y = e^x - e^{-x} \rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Deoarece $e^x > 0$, rămîne $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, de unde $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$ și deci bijecția inversă este $f^{-1}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

Transformări liniare

Definiția 8.1. Aplicația λ a spațiului vectorial $\mathbf{R}^n$ în spațiul vectorial $\mathbf{R}^m$ se numește transformare liniară dacă

$$\lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_1) + \lambda(x_2)$$

$$\lambda(\alpha x) = \alpha \lambda(x)$$

oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ și $\alpha \in \mathbf{R}$.

Observații 1. Dacă λ este transformare liniară se mai notează λx în loc de $\lambda(x)$.

2. Dacă $m = n$ transformarea λ se numește operator.

Fie în $\mathbf{R}^n$ baza $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ pe care o vom numi bază standard.

Definiția 9.1. Prin matrice a transformării liniare $\lambda: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ relativă la bazele standard din $\mathbf{R}^n$ și $\mathbf{R}^m$ înțelegem matricea $(m \times n)$ notată $A = \|a_{ij}\|$ în care elementele coloanei j sînt componentele vectorului $\lambda(e_j)$

$$\lambda(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{mj}e_m.$$

Dacă x este un vector oarecare din $\mathbf{R}^n$, vectorul transformat $\lambda(x)$ este dat de:

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

Exemplu: Transformarea $\lambda: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ dată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

$\theta \in [0, \pi)$ are proprietatea că este liniară și dacă $x = (x_1, x_2)$ și $y = (y_1, y_2)$ sînt 2 vectori din $\mathbf{R}^2$ atunci $\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle = \langle x, y \rangle$

Transformarea este liniară deoarece

$$\lambda(x+y) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \lambda(x) + \lambda(y) \text{ și}$$

$$\text{și } \lambda(\alpha x) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} = \alpha \lambda(x)$$

$\lambda(x)$ este vectorul dat de produsul matricei A cu vectorul coloană y . Avem

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta \\ -x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda(y) = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ -\cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta \\ -y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta \end{pmatrix}$$

Produsul scalar:

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle &= (x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta)(y_1 \sin \theta + y_2 \cos \theta) + \\ &+ (-x_1 \cos \theta + x_2 \sin \theta)(-y_1 \cos \theta + y_2 \sin \theta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \end{aligned}$$

Propoziția. Dacă $\lambda: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ este o transformare liniară există $M > 0$, astfel ca:

$$\|\lambda(x)\| \leq M \|x\|, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}^n,$$

unde $\|\lambda(x)\|$ este lungimea vectorului transformat.

Demonstrație:

Dacă $A = (a_{ij})$ este matricea transformării

$$\begin{aligned} \|\lambda(x)\| &= \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j\right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right)^2} \leq \\ &\leq M_1 \sqrt{m \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)} = \sqrt{m} M_1 \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2} = M_1 \sqrt{m} \|x\|, \end{aligned}$$

Am notat $M_1 = \max |a_{ij}|$, $M = M_1 \sqrt{m}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Definiția 10.1. Dacă $\lambda: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, λ liniară și $\mu: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^p$, μ liniară definim transformarea compusă sau transformarea produs prin $(\mu\lambda)x = \mu(\lambda(x))$.

Matricea transformării compuse este produsul matricilor celor două transformări.

§ 3. SPAȚII METRICE. SPAȚII TOPOLOGICE

Definiția 1.3. Fie E o mulțime oarecare. Se numește *metrică* sau *distanță* (se notează cu d) o aplicație a mulțimii $E \times E$ în mulțimea $\mathbf{R}^+ = \{x, x \in \mathbf{R}, x \geq 0\}$ astfel încât fiecărei perechi $(x, y) \in E \times E$ îi corespunde numărul $d(x, y) \in \mathbf{R}^+$ cu proprietățile:

- 1) $d(x, y) = d(y, x)$
- 2) $d(x, y) > 0$ dacă $x \neq y$ și $d(x, x) = 0$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Consecință

$$3') d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Exemple de metrici

- a) Funcția $d(x, y): \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ prin $d(x, y) = |x - y|$
- b) $d: \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^+$ prin $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
- c) $d: \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^+$ prin $d(x, y) = \sum_{i=1}^k |x_i - y_i|$
- e) $d: A \times A \rightarrow \mathbf{R}^+$, A mulțime oarecare prin:

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

Definiția 2.3. Numim *spațiu metric* perechea (E, d) unde E este o mulțime oarecare iar d este o metrică definită pe $E \times E \rightarrow \mathbf{R}^+$.

În cele ce urmează vom lucra în mod obișnuit cu metricile

$$d(x, y) = |x - y|, \quad (x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \text{ în } \mathbf{R} \text{ și cu } d(x, y) = \|x - y\|, \\ (x, y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k.$$

Spațiul $(\mathbf{R}^k, \|\cdot\|)$ îl vom numi *spațiu metric normat*.

Vom defini în cele ce urmează o structură de spațiu topologic pe un spațiu metric. Din necesitățile legate de dezvoltarea ulterioară a cursului, vom defini topologia în spațiul $(\mathbf{R}^k, \|\cdot\|)$.

Definiția 3.3. Fie $a \in \mathbf{R}^k$ și $r \in \mathbf{R}^+$. Mulțimea punctelor $x \in \mathbf{R}^k$ pentru care $\|x - a\| < r$ ($\|x - a\| \leq r$) se numește *sferă deschisă* (*închisă*) cu centrul în a și raza r . O vom nota prin $B_r(a)$.

Observații 1. În cazul când $a \in \mathbf{R}$ și $x \in \mathbf{R}$, sfera deschisă devine $|x - a| < r$ adică interval simetric $(a - r, a + r)$.

2. Dacă $a = (a_1, a_2) \in \mathbf{R}^2$ și $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, sfera deschisă este $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} < r$ sau încă $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2$ și are ca imagine discul cu centrul în (a_1, a_2) și de rază r .

3. Dacă $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$ și $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ sfera deschisă este $\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2} < r$ și are ca imagine geometrică sfera de centru (a_1, a_2, a_3) din $\mathbf{R}^3$.

Definiția 4.3. O mulțime $A \subset \mathbf{R}^k$ este mulțime mărginită dacă există o sferă $B_r(a)$ astfel încît $A \subset B_r(a)$.

Example:

1. Mulțimea $A = (-2, 1)$ este mărginită. În acest caz sfera deschisă este intervalul $(-2, 2)$.

2. Mulțimea $I^k = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_k$ este mărginită dacă $I_l = (a_l, b_l)$, $l = 1, 2, \dots, k$.

Definiția 5.3. Mulțimea O din spațiul metric $\mathbf{R}^k$ (în care am definit metrica $d(x, y) = \|x - y\|$) se numește *deschisă* în $\mathbf{R}^k$ dacă pentru fiecare din punctele ei există o sferă deschisă cu centrul în acest punct, conținută în $\mathbf{R}^k$.

Proprietăți ale mulțimilor deschise

a) Mulțimea totală și mulțimea vidă sînt mulțimi deschise.

b) Intersecția unui număr finit de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

Într-adevăr fie $\{O_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ un număr finit de mulțimi deschise și $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i \rightarrow x \in O_i$ pentru orice $i = 1, 2, \dots, n$, O_i este mulțime deschisă deci există $r_i > 0$ astfel încît

$$B_{r_i}(x) \subset O_i, i = 1, 2, \dots, n. \text{ Luînd } r = \min \{r_1, r_2, \dots, r_n\}, B_r(x) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i.$$

Observație. Intersecția unui număr infinit de mulțimi deschise nu este întotdeauna o mulțime deschisă.

$$\text{Astfel } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) = \{0\} \text{ nu este deschisă.}$$

c) Reuniunea unui număr oarecare de mulțimi deschise este o mulțime deschisă.

$$\begin{aligned} \text{Fie } x \in \bigcup_{\alpha \in I} O_{\alpha} &\rightarrow \text{există } \alpha_0 \in I \text{ astfel ca } x \in O_{\alpha_0} \rightarrow \text{există } B_r(x) \subset O_{\alpha_0} \rightarrow \\ &\rightarrow B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_{\alpha}. \end{aligned}$$

Definiția 6.3. O mulțime X pe care am definit o familie de mulțimi deschise cu proprietățile a), b), c) formează *spațiul topologic*.

Astfel spațiul normat $\mathbf{R}^k$ în care am definit mulțimile deschise, este un spațiu topologic.

Observație. Noțiunea de *spațiu topologic* este mai generală decît cea de *spațiu metric*. În cazul discutat mai sus mulțimile deschise sînt definite cu ajutorul metricii.

Punctele unei mulțimi deschise le numim puncte interioare.

Exemple:

a) Intervalele $(a, b) \subset \mathbf{R}$ sînt mulțimi deschise în $\mathbf{R}$ (în $\mathbf{R}$ am considerat metrica $d(x, y) = |x - y|$).

b) Intervalele $I_k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ sînt mulțimi deschise în $(\mathbf{R}^k, \|\cdot\|)$.

Definiția 7.3. Numim interiorul mulțimii A , $A \subset \mathbf{R}^k$, cea mai mare mulțime deschisă conținută în A . Notăm:

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{i \in I} O_i, O_i \text{ mulțimi deschise, } O_i \subset A.$$

Definiția 8.3. Numim vecinătate a punctului a , $a \in \mathbf{R}^k$ orice submulțime care conține o mulțime deschisă care conține pe a .

Notăm $\mathcal{V}_a$ mulțimea vecinătăților punctului „ a ”.

Mulțimea vecinătăților punctului „ a ” are proprietățile:

1) dacă $V \in \mathcal{V}_a \rightarrow a \in V$

2) dacă $V \in \mathcal{V}_a$ și $V_1 \subset V$ atunci $V_1 \in \mathcal{V}_a$

3) dacă $V_i \in \mathcal{V}_a$ ($i = 1, 2, \dots, n$), atunci $\bigcap_{i=1}^n V_i \in \mathcal{V}_a$

4) oricare ar fi $a \neq b$ există vecinătăți ale punctelor a și b care nu se intersectează. Aceste proprietăți rezultă din proprietățile mulțimilor deschise.

Definiția 9.3. Punctul „ a ” este un *punct limită* (punct de acumulare) pentru mulțimea $A \subset \mathbf{R}^k$, dacă orice vecinătate a punctului „ a ” conține cel puțin un punct x , $x \in A$, $x \neq a$.

Dacă $a \in A$ nu este punct limită pentru mulțimea A , spunem că „ a ” este un *punct izolat*.

Exemplu. Dacă $A = ([2, 3] \cup \{4\}) \times ((-1, 1) \cup \{2\})$ punctul $(3, 1)$ este un punct limită iar $(4, 2)$ este un punct izolat pentru mulțimea A .

Notăm cu A' mulțimea punctelor limită ale mulțimii A . Fie l și L marginea inferioară respectiv marginea superioară a mulțimii A' . Numim l (L), limita inferioară (superioară) pentru mulțimea A .

$$l = \liminf A = \underline{\lim} A$$

și

$$L = \limsup A = \overline{\lim} A$$

Exemplu. Mulțimea $A = \left\{ x_n, x_n = \frac{n-1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$, admite ca puncte limită punctele $-1, 0$ și 1 , deoarece:

$$\text{pentru } n = 2k, x_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \sin k\pi + \frac{1}{2k}$$

$$\text{pentru } n = 2k+1, x_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} (-1)^k - \frac{1}{2k+1}$$

În acest caz $l = -1$ și $L = 1$.

Teorema 1.3. Dacă „ a ” este un punct limită pentru mulțimea $A \subset \mathbf{R}^k$, orice vecinătate a punctului „ a ” conține o infinitate de puncte ale mulțimii A .

Demonstrație. Presupunem că există $V(a)$ care conține un număr finit de puncte ale mulțimii A . Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ punctele mulțimii $V(a) \cap A$ care nu coincid cu a . Să punem

$$r = \min_{1 \leq m \leq n} \|a - x_m\|, r > 0.$$

Sfera deschisă $B_r(a)$ nu conține nici un punct al mulțimii A astfel ca $x \neq a$ și deci a nu este punct limită pentru mulțimea A .

Definiția 10.3. Fie $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ vecinătăți ale punctului a , $a \in \mathbf{R}^k$. Spunem că familia $(\mathcal{V}_i)_{i \in I}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului „ a ” dacă orice vecinătate a punctului „ a ” conține una din vecinătățile $\mathcal{V}_i$.

Definiția 11.3. Mulțimea $F, F \subset \mathbf{R}^k$ este o mulțime închisă dacă își conține toate punctele limită.

Următorul rezultat stabilește o legătură între mulțimile închise și cele deschise.

Teorema 2.3. Mulțimea O este deschisă dacă și numai dacă complementara ei este o mulțime închisă.

Demonstrație. Să presupunem că CO este închisă și fie $x \in O \rightarrow x \notin CO$ și deci x nu este punct limită pentru mulțimea CO . Există $V(x)$ astfel ca $CO \cap V = \emptyset$ ceea ce arată că $V \subset O$. Aceasta arată că x este punct interior pentru O și deci O este mulțime deschisă.

Invers dacă presupunem că O este deschisă. Fie x un punct limită pentru CO ; din definiția punctului limită rezultă că orice vecinătate a punctului x conține un punct din CO astfel că x nu poate fi punct interior pentru O . Cum O este o mulțime deschisă rezultă că toate punctele ei sînt puncte interioare și deci $x \in CO$. Prin urmare CO este închisă.

Consecință. O mulțime F este închisă atunci și numai atunci cînd complementarea ei este mulțime deschisă. Din proprietățile mulțimilor deschise și **teorema 3** rezultă următoarele proprietăți pentru mulțimile închise:

a') Mulțimea totală și mulțimea vidă sînt mulțimi închise.

Acestea sînt singurele mulțimi care sînt și deschise și închise.

b') Reuniunea unui număr finit de mulțimi închise este o mulțime închisă. Proprietatea nu este adevărată pentru o reuniune infinită. Astfel $\bigcup_{n=1}^{\infty} [n, n+1]$ nu este o mulțime închisă.

c') Intersecția unui număr oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Exemple:

1) Mulțimea $[a, b] \subset \mathbf{R}$ este o mulțime închisă.

2) Mulțimea $\{x, x \in \mathbf{R}^n, \|x - a\| \geq r\}$ este o mulțime închisă.

Teorema 3.3. Fie $F, \bar{F} \subset \mathbf{R}$ o mulțime închisă, mărginită superior. Atunci marginea superioară M a mulțimii F aparține lui F .

Demonstrație. Presupunem că $M \notin F$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x \in F$ astfel încât: $M - \varepsilon < x < M$. Astfel fiecare vecinătate a punctului M conține un punct oarecare x din mulțimea F , $x \neq M$ și M apare ca un punct limită pentru mulțimea F , $M \notin F$ ceea ce arată că $\bar{F}$ nu este închisă. Dar aceasta contrazice ipoteza deci $M \in F$.

Vom numi *închiderea* unei mulțimi A ca fiind cea mai mică mulțime închisă care conține mulțimea A .

Notăm această mulțime cu $\bar{A}$ și scriem că:

$$\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i, F_i \supset A, F_i \text{ închise.}$$

§ 4. MULȚIMI COMPACTE

Definiția 1.4. Numim acoperire deschisă a unei mulțimi $A \subset \mathbf{R}^k$, familia $\{O_\alpha\}$ de submulțimi deschise din $\mathbf{R}^k$ astfel ca $A \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$.

Definiția 2.4. Dacă orice acoperire deschisă a mulțimii $K \subset \mathbf{R}^k$ conține o subacoperire finită spunem că mulțimea K este compactă.

Aceasta înseamnă că dacă $\{O_\alpha\}$ este o acoperire deschisă a mulțimii K , există un număr finit de indici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel ca:

$$K \subset O_{\alpha_1} \cup O_{\alpha_2} \cup \dots \cup O_{\alpha_n}.$$

Teorema 1.4. O submulțime închisă a unei mulțimi compacte este o mulțime compactă.

Demonstrație. Fie $A \subset K \subset \mathbf{R}^k$, K mulțime compactă și A mulțime închisă.

Fie $\{V_i\}_{i \in I}$ o acoperire deschisă a mulțimii A . Să considerăm mulțimile $W_i = \bar{CA} \cup V_i$.

Mulțimile W_i sînt deschise (deoarece $\bar{CA}$ este deschisă). Mulțimile $\{W_i\}_{i \in I}$ formează o acoperire deschisă a mulțimii K . Cum K este compactă există o subfamilie finită de mulțimi deschise care acoperă pe K și deci și pe A .

Teorema 2.4. Dacă $A \subset K \subset \mathbf{R}^k$, K compactă și A infinită atunci, A are un punct limită care aparține mulțimii K .

Demonstrație. Dacă niciunul din punctele mulțimii K nu este punct limită pentru mulțimea A , atunci pentru orice punct $x \in K$ există o vecinătate V_x care nu conține mai mult de un punct din A . Astfel nici o subfamilie finită de mulțimi $\{V_x\}$ nu poate acoperi mulțimea A (deoarece A este infinită) deci nici pe K , ceea ce contrazice faptul că K este compactă.

Vom demonstra:

Teorema 3.4. Orice segment

$$I = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid a_j \leq x_j \leq b_j; j = 1, \dots, k\}$$

este o mulțime compactă.

Demonstrație. Fie $d = \|a - b\|$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ și $b = (b_1, b_2, \dots, b_k)$. Atunci $\|x - y\| \leq d$ pentru orice $x \in I$ și $y \in I$.

Vom presupune că mulțimea I nu este compactă. Există deci o acoperire deschisă $\{O_\alpha\}$ a mulțimii I care nu conține nici o subacoperire finită. Fie $c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$. Segmentele $[a_j, c_j]$, $[c_j, b_j]$ definesc 2^k intervale k -dimensionale Q_i , astfel ca $\bigcup Q_i = I$.

Cel puțin unul din aceste intervale Q_i , nu poate fi acoperit cu un număr finit de mulțimi deschise. Fie acesta I_1 . Repetăm procedeul pentru I_1 . Obținem astfel șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietățile:

a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$

b) I_n nu poate fi acoperit cu nici-o familie finită de mulțimi din $\{O_\alpha\}$.

c) dacă $x \in I_n$, $y \in I_n$ atunci $\|x_n - y_n\| \leq \frac{d}{2^n}$. Conform axiomei numerelor reale există un punct $x_0 \in I_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Pentru $\alpha = \alpha_0$, $x_0 \in O_{\alpha_0}$.

Deoarece O_α este deschisă, există $r > 0$ astfel ca din $\|y - x_0\| < r$ să rezulte $y \in O_{\alpha_0}$. Pentru n convenabil ales, $\frac{d}{2^n} < r$ și deci c) rezultă că $I_n \subset O_{\alpha_0}$ ceea ce contrazice ipoteza.

Teorema 4.4. Pentru o mulțime $A \subset \mathbb{R}^k$ următoarele proprietăți sînt echivalente:

a) A este închisă și mărginită.

b) A este compactă.

c) orice submulțime infinită a mulțimii A are un punct limită ce aparține mulțimii A .

Demonstrație. a) $\rightarrow$ b). Dacă are loc a) atunci A este mărginită dacă există I astfel ca $A \subset I$, I compact iar A o submulțime închisă. Conform teoremei 1.4, A este compactă.

b) $\rightarrow$ c) rezultă din teorema 2.4.

c) $\rightarrow$ a) Să presupunem că A nu este mărginită. Există puncte $x_n, x_n \in A$ pentru care $\|x_n\| > n$, $n \in \mathbb{N}$. Mulțimea acestor puncte este infinită și nu are puncte limită în $\mathbb{R}^k$ și deci nici în A . Rezultă că A este mărginită. Să arătăm că A este închisă. Dacă A nu este închisă, există un punct $x_0 \in \mathbb{R}^k$ punct-limită a lui A care nu aparține lui A . Există punctele $x_n \in A$ astfel ca $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$. Fie S mulțimea acestor puncte x_n . S este o mulțime

infinită; x_0 este punct limită al mulțimii S și în $\mathbb{R}^k$ nu există alte puncte limită ale mulțimii S . Deci, dacă $y \in \mathbb{R}^k$, $y \neq x_0$, atunci:

$$\|x_0 - y\| \leq \|x_n - y\| + \|x_n - x_0\|, \quad \|x_n - x_0\| \leq \frac{1}{n}$$

și, deci

$$\|x_n - y\| \geq \|x_0 - y\| - \|x_n - x_0\| > \frac{1}{2} \|x_0 - y\|$$

pentru toți n , înafara unei mulțimi finite. Aceasta arată că y nu este punct limită al mulțimii S .

Teorema 5.4. (Weierstrass—Bolzano). Orice submulțime A , infinită și mărginită în $\mathbf{R}^k$ admite un punct limită.

Demonstrație. A este mărginită, deci există $I \subset \mathbf{R}^k$ astfel ca $A \subset I$. Mulțimea I este compactă și deci are un punct limită.

§ 5. MULȚIMI CONEXE

Definiția 1.5. Mulțimea $X \subset \mathbf{R}^k$ se numește conexă dacă nu există două mulțimi deschise O_1 și O_2 , $O_1 \subset \mathbf{R}^k$, $O_2 \subset \mathbf{R}^k$ astfel ca

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset, O_1 \cap X \neq \emptyset, O_2 \cap X \neq \emptyset \text{ și}$$

$$X \subset O_1 \cup O_2.$$

Teorema 1.5. Submulțimea $X \subset \mathbf{R}$ este conexă atunci și numai atunci când X are proprietatea: dacă $x \in X$, $y \in X$ și $x < z < y$, atunci $z \in X$.

Demonstrație. Să presupunem că această condiție nu are loc, adică $x \in X$, $y \in X$, $x < z < y$ dar $z \notin X$.

Dacă $O_1 = \{\alpha, \alpha < z\}$ și $O_2 = \{\beta, \beta > z\}$ din definiția dată rezultă că X nu este conexă.

Să presupunem că X nu este conexă. Există deci punctele $x \in X$, $y \in X$, $x < y$ și mulțimile deschise care nu se intersectează în $\mathbf{R}$ astfel ca $x \in O_1$, $y \in O_2$ și $X \subset O_1 \cup O_2$.

Fie $S = O_1 \cap [x, y]$ și $z = \sup S$.

Deoarece $y \in O_2$ și O_2 este deschisă avem $z < y$. În acest fel, dacă $z \in O_1$, O_1 deschisă rezultă că z nu este margine superioară a mulțimii S , deci $z \notin O_1$. Deoarece $x \in O_1$ și O_1 este deschisă avem $x < z$. Astfel dacă $z \in O_2$ și O_2 este deschisă rezultă că z nu este margine superioară pentru mulțimea S deci $z \notin O_2$.

Exerciții propuse

1. Să se arate că pentru orice numere reale

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \text{și} \quad ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

2. Să se arate că pentru $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{este o normă.}$$

3. Se consideră funcțiile:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R} \text{ și } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbf{R}$$

Să se arate că $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Să se determine un interval pe care funcția $\operatorname{ch} x$ este bijecție și pe acest interval să se determine bijecția inversă. Același lucru pentru $\operatorname{sh} x$.

R. Notăm $\operatorname{sh} x = y$ obținem $\operatorname{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ și $\operatorname{ch}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in (1, \infty)$, $\operatorname{ch}^{-1} x \in (0, \infty)$ și $\operatorname{ch}^{-1} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in (1, \infty)$, $\operatorname{ch}^{-1} x \in (-\infty, 0)$

4. Să se arate că mulțimea $\mathbf{R}^k$ în care am definit aplicația

$$d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ este spațiu metric

5. Să se determine imaginea geometrică a sferei deschise $B_5(2, -1)$

din $\mathbf{R}^2$ în care am definit metrica $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^2 |x_i - y_i|$ respectiv metrica

$$d_2(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$$

6. Să se arate că dacă $A \subset B$ atunci $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ unde prin $\overset{\circ}{A}$ am notat interiorul mulțimii A .

7. Să se arate că

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

dacă $x \in \mathbf{R}^k$, $y \in \mathbf{R}^k$.

CAPITOLUL II

FUNCȚII ÎN $\mathbf{R}^k$

§ 1. ȘIRURI DE NUMERE ÎN $\mathbf{R}^k$

Definiția 1.1. Se numește *șir* de numere în $\mathbf{R}^k$, o aplicație a mulțimi $\mathbf{N}$ în $\mathbf{R}^k$.

Notăm valorile acestei aplicații prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Exemplu:

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}}, \quad a_n = \left(\sin \frac{n\pi}{2}, \quad \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$n \in \mathbf{N}$ este un șir de numere în $\mathbf{R}^2$.

Definiția 2.1. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ se numește *convergent*, dacă există $a_0 \in \mathbf{R}^k$ astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $N(\varepsilon)$ pentru care:

$$\|a_n - a_0\| < \varepsilon \text{ cînd } n > N(\varepsilon).$$

Scriem în acest caz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$.

Observație: 1. Pentru $k = 1$, $\|\cdot\| = |\cdot|$ și definiția convergenței unui șir devine: șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ este convergent către $a_0 \in \mathbf{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$.

2. Din expresia normei $\|a_n - a_0\|$, cu $a_n = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k})$, $a_0 = (a_{o_1}, a_{o_2}, \dots, a_{o_k})$, rezultă

$$|a_{n_i} - a_{o_i}| < \sqrt{\sum_{i=1}^k (a_{n_i} - a_{o_i})^2} = \|a_n - a_0\| < \sum_{i=1}^k |a_{n_i} - a_{o_i}|.$$

Din această dublă inegalitate se vede că un șir de numere în $\mathbf{R}^k$ este convergent dacă și numai dacă șirurile componente $(a_{n_i})_{n \in \mathbf{N}}$, $i = 1, 2, \dots, k$ sînt convergente.

Mulțimea valorilor șirului $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ este mulțimea $A = \{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ care poate fi o mulțime mărginită sau nemărginită.

Definiția 3.1. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ este *divergent* dacă este îndeplinită condiția: oricare ar fi $A > 0$ există $N(A)$ astfel încît pentru $n > N(A)$,

$\|a_n\| > A$. Legătura între şirurile mărginite şi şirurile convergente este dată de:

Teorema 1.1. Orice şir convergent este mărginit.

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^k$ şi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$. Să notăm $r = \max \{\varepsilon, \|a_1 - a_0\|, \|a_2 - a_0\|, \dots, \|a_{N(\varepsilon)} - a_0\|\}$. În acest caz $\|a_n - a_0\| \leq r$, $n = 1, 2, \dots$ şi toţi termenii şirului se găsesc în sfera $B_r(a_0)$ ceea ce arată că şirul este mărginit.

Teorema 2.1. Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^k$ converge către $a_0 \in \mathbb{R}^k$ dacă şi numai dacă orice vecinătate $V(a_0)$ a punctului a_0 , conţine toţi termenii şirului înafara unui număr finit.

Demonstraţie: a) Fie $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ şi fie $V(a_0)$ o vecinătate oarecare a punctului a_0 .

Există $B_\varepsilon(a_0) \subset V(a_0)$ unde $B_\varepsilon(a_0) = \{x \mid \|x - a_0\| < \varepsilon\}$. Acestui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $N(\varepsilon)$ astfel ca din $n > N(\varepsilon)$ rezultă $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ ceea ce înseamnă că $a_n \in V(a_0)$.

b) reciproc: Să presupunem că orice $V(a_0)$ conţine toţi termenii şirului înafara unui număr finit. Fie $\varepsilon > 0$ dat şi $\{x, \|x - a_0\| < \varepsilon\} \subset V$.

Prin definiţie există $N^*(\varepsilon)$ astfel că $a_n \in V$ pentru $n > N^*(\varepsilon)$. Astfel $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ pentru $n > N^*(\varepsilon)$ ceea ce arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$. O definiţie echivalentă, pentru convergenţa unui şir din $\mathbb{R}$ este dată de

Teorema 3.1. Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}$ este convergent dacă şi numai dacă $l = L$.

Demonstraţie: a) Fie $l = L = a_0$, l fiind cel mai mic punct de acumulare, la stînga lui $l - \varepsilon$ se găseşte numai un număr finit de termeni din mulţimea $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$. La fel la dreapta lui $L + \varepsilon$ se găseşte un număr finit de termeni a_n , deci găsim un rang $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $l - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ ceea ce arată că $|a_n - a_0| < \varepsilon$.

b) Reciproc, dacă $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$ atunci $a_0 - \varepsilon < a_n < a_0 + \varepsilon$, toţi termenii şirului înafara unui număr finit se găsesc în $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$. Dar l şi L sînt puncte limită şi avem:

$$a_0 - \varepsilon < l < L < a_0 + \varepsilon$$

unde $L - l < 2\varepsilon$. Cum ε este arbitrar $l = L$.

Definiţia 4.1. Fie un şir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^k$. Să considerăm succesiunea $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de numere naturale. Şirul $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ se numeşte subşir al şirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Am văzut că un şir convergent este mărginit. Reciproca nu este adevărată.

Are loc însă:

Teorema 4.1. (Cesaró). Orice şir mărginit în $\mathbb{R}^k$ conţine un subşir convergent.

Demonstrație. Fie A mulțimea valorilor șirului mărginit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^k$. Dacă A este finită există un punct $x \in A$ și un șir $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ($n_1 < n_2 < \dots$) astfel ca $x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x$.

Dacă mulțimea A este infinită, fiind mărginită, ea are un punct limită $x_0 \in \mathbb{R}^k$ (teorema lui Bolzano).

Alegem n_1 astfel ca $\|x_{n_1} - x_0\| < 1$ și $n_2, \dots, n_{i-1}$ astfel ca $\|x_{n_i} - x_0\| < \frac{1}{i}$. (Acest lucru este posibil deoarece vecinătatea oricărui punct limită conține o infinitate de termeni.)

Exemplu. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n = (-1)^n$. Mulțimea $A = \{-1, 1\}$. Subșirul $-1, -1, \dots, -1$, converge către $a_0 = -1$.

Definiția 5.1. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a \in \mathbb{R}^k$ se numește șir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n > n_0(\varepsilon)$ și $p \geq 1$.

$$\|a_{n+p} - a_n\| < \varepsilon.$$

Legătura între șirurile Cauchy și șirurile convergente este dată de:

Teorema 5.1. Condiția necesară și suficientă ca un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^k$ să fie convergent este ca el să fie șir Cauchy.

Demonstrație. 1) Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ și pentru $p > 1$, $\|a_{n+p} - a_0\| < \varepsilon$.

Dar $\|a_{n+p} - a_n\| \leq \|a_{n+p} - a_0\| + \|a_n - a_0\| < 2\varepsilon$ ceea ce arată că $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir Cauchy.

2. Reciproc. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir Cauchy. Deci $\|a_{n+p} - a_n\| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$. Trecând la componente rezultă că

$$|a_{n+p+i} - a_{n+i}| < \varepsilon \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon) \text{ și } i = 1, 2, \dots, k.$$

Luând $n = n_0(\varepsilon) + 1 > n_0(\varepsilon)$,

$$|a_{n_0+1+p+i} - a_{n_0+1+i}| < \varepsilon$$

deci în afara termenilor $a_1, a_2, \dots, a_{n_0}$ toți termenii se găsesc în intervalul

$$(a_{n_0+1+i} - \varepsilon, a_{n_0+1+i} + \varepsilon)$$

La fel l , $L \in (a_{n_0+1+i} - \varepsilon, a_{n_0+1+i} + \varepsilon)$ deci $0 < L - l < 2\varepsilon \rightarrow l = L$ ceea ce arată că toate șirurile componente sînt convergente, deci șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent.

Observație. În general într-un spațiu liniar oarecare nu orice șir Cauchy este convergent. Un spațiu metric oarecare (E, d) în care un șir Cauchy este convergent se numește *metric complet*. Astfel $(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ este un spațiu complet. Mai general au loc

Definiția 6.1. Un spațiu normat complet se numește *spațiu Banach*.

Definiția 7.1. Un spațiu Banach în care norma este dată de un produs scalar este un spațiu Hilbert.

Din cele studiate în cap. I rezultă că $\mathbf{R}^n$ este un spațiu Hilbert (considerând norma euclidiană).

Definiția 8.1. Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ se numește șir crescător (descrescător) dacă $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \dots$ ($a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$) și strict crescător (strict descrescător) dacă $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$ ($a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots$).

Teorema 6.1. Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ monoton și mărginit este convergent.

Demonstrație. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ fiind mărginit nu poate avea limite infinite. Arătăm că are un singur punct limită.

Presupunem că ar avea 2 puncte limită. $l \neq L$ ($l < L$); să împărțim intervalul (l, L) în trei părți egale și fie $\varepsilon = \frac{L-l}{3}$. Fie n_1 un indice pentru

care $a_{n_1} = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Alegem $n_2 > n_1$ astfel ca $a_{n_2} \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$. (Acest lucru se poate deoarece fiecare din intervalele $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$, $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ conține o infinitate de termeni). Luăm apoi $n_3 > n_2$ astfel ca $a_{n_3} \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Să presupunem că șirul este crescător. Am obținut pentru $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$, că $a_{n_1} < a_{n_2}$ și $a_{n_3} < a_{n_2}$ ceea ce contrazice ipoteza de monotonie (fig. 6).

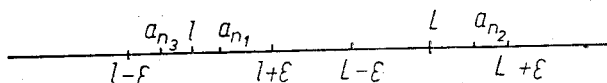


Fig. 6

În legătură cu șirurile nemărginite are loc:

Teorema 7.1. Un șir monoton și nemărginit de elemente din $\mathbf{R}$ este divergent.

Demonstrație. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ șir monoton crescător, nemărginit superior. Pentru orice $A > 0$, există n_0 astfel că $a_{n_0} > A$. Deoarece șirul este crescător urmează că pentru orice $n > n_0$, $a_n > a_{n_0} > A$ deci șirul are limita $+\infty$.

Exemple:

1. Șirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este un șir monoton și mărginit.

Scriem:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Din forma desfășurată a lui a_n ; rezultă $a_n < a_{n+1}$, deoarece $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$.

De asemenea $a_n > 2$ deoarece $\left(1 - \frac{k}{n}\right) > 0$ când $k < n$.

Astfel șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton crescător și mărginit, deci convergent. Limita lui o notăm cu e .

2. Șirul $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este monoton descrescător.

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{b_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \\ &= \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

Din inegalitatea lui Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n} \text{ rezultă}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

Operații cu șiruri în $\mathbb{R}^k$

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ șiruri convergente în $\mathbb{R}^k$ $a_n = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k})$, $b_n = (b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k})$ și a_0, b_0 limitele lor.

Are loc

Teorema 8.1. Suma șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in \mathbb{R}^k$, $b_n \in \mathbb{R}^k$ are ca limită pe $a_0 + b_0$.

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_1(\varepsilon)$ astfel ca $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ pentru $n > n_1(\varepsilon)$ și există $n_2(\varepsilon)$ astfel ca $\|b_n - b_0\| < \varepsilon$ pentru $n > n_2(\varepsilon)$. Alegem $n_0 = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$ și avem pentru $n > n_0$,

$$\|(a_n + b_n) - (a_0 + b_0)\| \leq \|a_n - a_0\| + \|b_n - b_0\| < 2\varepsilon.$$

În cazul în care $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sînt șiruri în $\mathbf{R}$ au loc

Teorema 9.1. a) Produsul șirurilor convergente $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se definește ca fiind șirul $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ care are ca limită pe $a_0 \cdot b_0$.

b) Cîțul șirurilor $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $b_n \neq 0$ este prin definiție șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dacă $b_n \neq 0$, șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ are ca limită pe $\frac{a_0}{b_0}$.

Demonstrație.

a) $|a_n b_n - a_0 b_0| = |a_n b_n - a_0 b_n + a_0 b_n - a_0 b_0| \leq |b_n| |a_n - a_0| + |a_0| |b_n - b_0|$. Dar $a_n \rightarrow a_0$ și $b_n \rightarrow b_0$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $|a_n - a_0| < \varepsilon$, $|b_n - b_0| < \varepsilon$. Șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent, deci este și mărginit și există M astfel ca $|b_n| < M$.

Rezultă $|a_n b_n - a_0 b_0| < (M + |a_0|)\varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_0}{b_0} \right| &= \left| \frac{a_n b_0 - a_0 b_n + a_0 b_0 - a_0 b_0}{b_n b_0} \right| = \left| \frac{b_0(a_n - a_0) - a_0(b_n - b_0)}{b_n b_0} \right| \leq \\ &\leq \frac{|a_n - a_0|}{|b_n|} + \frac{|a_0|}{|b_n b_0|} |b_n - b_0|. \end{aligned}$$

Șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fiind convergente rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_1(\varepsilon)$, $n_2(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_1(\varepsilon)$ și $|b_n - b_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_2(\varepsilon)$. Șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ fiind convergent este și mărginit deci

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_0}{b_0} \right| \leq M \left(1 + \frac{|a_0|}{|b_0|} \right) \varepsilon$$

ceea ce arată convergența șirului cîț.

§ 2. SERII NUMERICE ÎN $\mathbf{R}^k$

Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elemente din $\mathbf{R}^k$ și $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, ...

Șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește șirul sumelor parțiale pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Definiția 1.2. Seria $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ este convergentă (divergentă) după cum șirul $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent (divergent).

Mai mult chiar, vom spune că suma seriei este limita șirului sumelor parțiale.

Ne așteptăm astfel ca o serie de rezultate cunoscute de la șiruri de numere să le folosim pentru studiul seriilor de numere.

Teorema 1.2. (Criteriul general al lui Cauchy). Seria $\sum_1^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ converge atunci și numai atunci când pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel ca

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right\| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad p \geq 1.$$

Demonstrația rezultă din Criteriul lui Cauchy pentru șirul $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$, deoarece $\|s_{n+p} - s_n\| = \|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}\| < \varepsilon$ când $n > N(\varepsilon)$, $p \geq 1$.

În cazul particular $p = 1$ se obține

$$\|a_{n+1}\| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$$

Are loc

Consecința. Dacă seria $\sum_1^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ este convergentă atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = 0$.

Aceasta reprezintă o condiție necesară de convergență. Condiția nu este și suficientă.

Astfel seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, \frac{1}{n} \right)$ nu este convergentă deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{1}{e}, 0 \right) \text{ sau încă } \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\| = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Am văzut că studiul convergenței unui șir de elemente din $\mathbf{R}^k$ se reduce a studiul convergenței componentelor sale.

Criterii pentru serii cu termeni pozitivi

Vom prezenta în continuare criterii suficiente de convergență pentru seriile în $\mathbf{R}$.

O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}$ este o serie cu termeni pozitivi dacă are o infinitate de termeni pozitivi și numai un număr finit de termeni negativi.

Criteriul monotoniei. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă și numai dacă șirul sumelor parțiale este mărginit.

Demonstrație. Șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $s_n \in \mathbf{R}^+$ este monoton. Dacă este și mărginit atunci este convergent.

Criteriul de comparație. Dacă $\sum_1^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}$ este o serie cu termeni pozitivi și $a_n \leq b_n$, unde $\sum_1^{\infty} b_n$ este o serie convergentă atunci $\sum_1^{\infty} a_n$ este convergentă.

Dacă $b_n \geq a_n \geq 0$ și seria $\sum_1^\infty a_n$ este divergentă atunci seria $\sum_1^\infty b_n$ este divergentă.

Demonstrație. Din criteriul lui Cauchy rezultă că $b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$ pentru $\varepsilon > 0$ și $n > n_0(\varepsilon)$, dacă $\sum_1^\infty b_n$ este o serie cu termeni pozitivi. Dar $a_{n+1} + \dots + a_{n+p} \leq b_{n+1} + \dots + b_{n+p} < \varepsilon$.

Dacă seria $\sum_1^\infty a_n$ este divergentă criteriul lui Cauchy nu se aplică deci: există $\varepsilon > 0$ și $n > n_0(\varepsilon)$ astfel ca

$$a_{n+1} + \dots + a_{n+p} > \varepsilon.$$

Deoarece $b_{n+1} + \dots + b_{n+p} > a_{n+1} + \dots + a_{n+p}$, rezultă că seria $\sum_1^\infty b_n$ este divergentă.

Observație. O formă a criteriului comparației folosită cu succes în practică este următoarea: Dacă $\sum_1^\infty a_n$ și $\sum_1^\infty b_n$ sînt 2 serii de numere pozitive astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \quad \lambda \neq 0, \quad \infty$$

atunci seriile $\sum_1^\infty a_n$ și $\sum_1^\infty b_n$ au aceeași natură.

Această afirmație rezultă din inegalitatea:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \lambda \right| < \varepsilon \text{ sau } (\lambda - \varepsilon) b_n < a_n < (\lambda + \varepsilon) b_n$$

și criteriul de comparație.

Exemplu. Seria $\sum_1^\infty 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ are aceeași natură cu seria $\sum_1^\infty \left(\frac{2}{3}\right)^n$ care este convergentă.

Un alt criteriu de comparație este:

Criteriul de condensare al lui Cauchy.

Fie $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0$ termenii unei serii $\sum_1^\infty a_n$. Seria $\sum_1^\infty a_n$ este convergentă sau divergentă în același timp cu seria $\sum_1^\infty 2^k a_{2^k}$.

Demonstrație. Notăm $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ și $t_k = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k}$.

Pentru $n < 2^k$, $s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^k} + \dots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k} = t_k$, și, deci $s_n \leq t_k$.
Pentru $n \geq 2^k$;

$$\begin{aligned} s_n &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{k-1}+1} + \dots + a_{2^k}) \geq \\ &\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{k-1}a_{2^k} = \frac{t_k}{2} \end{aligned}$$

și deci $s_n \geq \frac{t_k}{2}$.

Aceasta arată că cele 2 șiruri de sume parțiale sînt în același timp mărginite sau nemărginite.

Exemple 1) Seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeași natură cu seria $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k}$. Această serie este o progresie geometrică convergentă pentru $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ și divergentă pentru $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$. De aici rezultă că seria lui Riemann este convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

2) Seria Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^\alpha n)}$ are aceeași natură cu seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{2^k(\ln 2^k)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Aceasta este însă o serie Riemann convergentă pentru $\alpha > 1$ și divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Criteriul lui D'Alembert. Dacă pentru o serie cu termeni pozitivi $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, $a_n \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

seria este convergentă, iar dacă

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

seria este divergentă.

Demonstrație. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \rightarrow$ există N_0 astfel încît $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, $n > N_0$.

Urmează că:

$$a_{N+2} \leq q a_{N+1}; \quad a_{N+3} \leq q a_{N+2}, \dots, a_{N+p+1} \leq q a_{N+p}.$$

Deci $a_{N+p+1} \leq q^p a_{N+1}$ și deoarece seria $\sum_{p=1}^{\infty} q^p$ este convergentă pentru $q < 1$ rezultă că $\sum_1^{\infty} a_n$ este convergentă.

La fel dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \rightarrow$ există N_0 astfel ca pentru $n > N_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q > 1$.

Deci

$$a_{N+2} \geq q a_{N+1}, \dots, a_{N+p} \geq q a_{N+p-1}$$

și în general

$$a_{N+p} \geq q^{p-1} a_{N+1}.$$

În baza criteriului comparației și, pentru $q > 1$ seria este convergentă deoarece $\sum_1^{\infty} q^{p-1}$ este divergentă.

Criteriul lui Cauchy. Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_1^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \quad \text{seria este convergentă}$$

și dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \text{seria este divergentă.}$$

Demonstrație. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ atunci există N_0 și $0 < k < 1$ astfel ca $\sqrt[n]{a_n} \leq k$ pentru $n > N_0$, $a_n \leq k^n$ și deci $a_{N_0+1} \leq k^{N_0+1}$, $a_{N_0+p} \leq k^{N_0+p}$. Dar $\sum_1^{\infty} k^{N_0+p}$ este convergentă pentru $k < 1$. Astfel $\sum_1^{\infty} a_n$ este convergentă. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ atunci există N_1 și $k > 1$ astfel ca $\sqrt[n]{a_n} \geq k > 1$ pentru $n > N_1$ de unde rezultă $a_n \geq k^n$ pentru $n > N_1$.

Fie $n = N_1 + p$. Atunci $a_{N_1+p} \geq k^{N_1+p}$ și cum seria $\sum_1^{\infty} k^{N_1+p}$ este divergentă rezultă că seria $\sum_1^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemplu. Seria $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^5} + \dots$ are $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{4}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{9}$ și deci seria este convergentă.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Dacă pentru seria $\sum_1^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}^+$

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda > 1$$

seria este convergentă și dacă

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \alpha < 1$$

seria este divergentă.

Demonstrație. a) Din ipoteză rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > n_0(\varepsilon)$

$$\left| n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 - \rho \right| < \varepsilon, \text{ unde } \lambda = 1 + \rho, \rho > 0$$

sau încă

$$a_{n+1}\rho - \varepsilon < na_n - (n+1)a_{n+1} < a_{n+1}\rho + \varepsilon.$$

Rezultă $na_n - (n+1)a_{n+1} > 0$; deci șirul na_n este monoton descrescător și mărginit inferior de zero.

Seria de termen general $(na_n - (n+1)a_{n+1})$, are șirul sumelor parțiale $s_n = a_1 - na_n$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = a_1 - l$, $l = \lim_{n \rightarrow \infty} na_n$.

De asemenea,

$$a_{n+1} < \frac{\varepsilon}{\rho} + \frac{[na_n - (n+1)a_{n+1}]}{\rho}$$

și cum seria $\sum_1^\infty (na_n - (n+1)a_{n+1})$ este convergentă rezultă că $\sum_1^\infty a_n$ este convergentă.

Pentru divergență, demonstrația este asemănătoare. O lăsăm ca un exercițiu pentru cititor.

Exemplu. Seria $\sum_1^\infty \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$ este o serie cu termeni pozitivi pentru care criteriul raportului dă:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)! 4^n \cdot n!}{4^{n+1} [(n+1)!]^2 (2n)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = 1; \end{aligned}$$

deci criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Rabbe și Duhamel conduce la

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2(n+1)}{(2n+1)} - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

și deci seria este divergentă.

Serii cu termeni oarecare

O serie $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, $a_n \in \mathbf{R}$ este o serie cu termeni oarecare dacă are o infinitate de termeni pozitivi și o infinitate de termeni negativi.

Considerăm seria $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$

Definiția 2.2. Spunem că seria $\sum_1^\infty a_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_1^\infty |a_n|$ este convergentă.

În caz contrar seria se numește simplu convergentă sau semiconvergentă.

Are loc

Teorema 2.2. Dacă o serie este absolut convergentă ea este și semiconvergentă.

Demonstrație. Folosim criteriul general al lui Cauchy. Dacă $\sum_1^\infty |a_n|$ este convergentă atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$ și $p > 1$,

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+p}|$$

ceea ce demonstrează că seria este și semiconvergentă.

Pentru a studia convergența absolută se aplică criteriile de convergență de la serii cu termeni pozitivi.

Vom stabili următorul criteriu de convergență simplă.

Teorema 3.2. (Criteriul lui Abel). Fie seria cu termeni oarecare

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

pentru care șirul sumelor parțiale $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este mărginit. Dacă $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ este un șir de numere pozitive monoton descrescător astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ atunci seria

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n + \dots$$

este convergentă.

Demonstrație. Fie $s_n = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$. Atunci

$$\begin{aligned} s_{n+p} - s_n &= a_{n+1} u_{n+1} + \dots + a_{n+p} u_{n+p} = a_{n+1} (t_{n+1} - t_n) + a_{n+2} (t_{n+2} - \\ &\quad - t_{n+1}) + \dots + a_{n+p} (t_{n+p} - t_{n+p-1}), \end{aligned}$$

deoarece $u_{n+k} = t_{n+k} - t_{n+k-1}$.

Putem scrie:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+p} t_{n+p} - a_{n+1} t_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) t_{n+k}.$$

Sumele t_n sînt mărginite; deci $|t_n| < M$. Şirul a_n fiind monoton descrescător,

$$a_{n+k} \geq a_{n+k+1}$$

avem:

$$|s_{n+p} - s_n| \leq M(a_{n+p} + a_{n+1}) + M(a_{n+1} - a_{n+p}) = 2a_{n+1}M$$

şi cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_0(\varepsilon)$ astfel ca $a_n < \varepsilon$ pentru $n > N_0(\varepsilon)$. Deci

$$|s_{n+p} - s_n| \leq 2\varepsilon M$$

şi conform criteriului lui Cauchy seria este convergentă.

Exemplu. Seria $\sum_1^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n}$ este simplu convergentă conform criteriului

lui Abel deoarece luînd $a_n = \frac{1}{n}$ şi $U_n = \sin \frac{n\pi}{4}$ avem: şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent la zero şi sumele parţiale

$$\sum_1^n \sin \frac{k\pi}{4} = \frac{\sin \frac{(n+1)\pi}{8} \sin \frac{n\pi}{4}}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

mărginite.

Seria nu este absolut convergentă deoarece $\frac{\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{n} \geq \frac{\sqrt{2}}{2n}$

Serii alternate. O serie de forma

$$(1) \quad u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

cu $u_k > 0$ se numeşte serie alternată.

Teorema 4.2. (Criteriul lui Leibniz). Dacă în seria alternată (1) şirul $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton descrescător şi are limita zero, seria este convergentă.

Demonstrație. Aplicăm criteriul lui Abel unde $a_n = |u_n|$ și $v_n = (-1)^n$.
 Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ are sumele parțiale mărginite iar $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$.

Operații cu serii

Definiția 3.2. Fie 2 serii de numere: $\sum_1^{\infty} a_n$, $\sum_1^{\infty} b_n$, $a_n \in \mathbf{R}$, $b_n \in \mathbf{R}$

- a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ se numește suma celor 2 serii
 b) Seria $a_1 b_1 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$ se numește seria produs a celor 2 serii.
 Are loc

Teorema 5.2. a) Dacă seriile $\sum_1^{\infty} a_n$ și $\sum_1^{\infty} b_n$ sînt convergente și au sumele S_1 și S_2 seria $\sum_1^{\infty} (a_n + b_n)$ este de asemenea convergentă și are suma $S_1 + S_2$.

b) Dacă cele 2 serii converg și cel puțin una dintre ele converge absolut, seria produs este convergentă și suma ei este $S_1 \cdot S_2$.

Demonstrație. a) Se aplică definiția convergenței unei serii.

$$b) \sigma_n = \sum_1^n a_k, t_n = \sum_1^n b_k, c_n = \sum_1^n a_k b_{n-k+1} \text{ și } s_n = \sum_1^n c_k.$$

Presupunem că seria $\sum_1^{\infty} b_k$ converge absolut. Fie

$$M = \sup |\sigma_n|, |\sigma_n - \sigma_m| \leq |\sigma_n| + |\sigma_m| \leq 2M.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ dat, există N_0 astfel ca pentru $n > N_0$, $p > 1$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \varepsilon \text{ și } \sum_{k=N_0}^{\infty} |b_k| \leq \varepsilon.]$$

Atunci pentru $n \geq N_0$,

$$\begin{aligned} |\sigma_n t_n - s_n| &= |(a_2 + \dots + a_n) b_n + (a_3 + \dots + a_n) b_{n-1} + \dots + a_n b_2| \leq \\ &\leq |a_2 + \dots + a_n| \cdot |b_n| + |a_3 + \dots + a_n| \cdot |b_{n-1}| + \dots + |a_n| |b_2| \leq \\ &\leq 2M(|b_n| + \dots + |b_{N_0+1}|) + \varepsilon(|b_2| + \dots + |b_{N_0}|) \leq 2M\varepsilon + \varepsilon K, \end{aligned}$$

de unde rezultă teorema.

Enunțăm fără demonstrație următoarele

Teorema 6.2. (Dirichlet). Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor seria rezultată este tot absolut convergentă.

Teorema 7.2. (Riemann). Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încât:

- 1) Seria obținută să aibă ca sumă un număr dat.
- 2) Seria obținută să fie divergentă.

Numărul e

Prin definiție $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Seria este convergentă deoarece

$$s_n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \dots n} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Teorema 8.2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Demonstrație. Fie $s_n = \sum_0^n \frac{1}{k!}$, $t_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} t_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Deci $t_n \leq s_n$ și $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} t_n \leq e$.

Dacă $n > m$,

$$t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{m!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Lăsăm pe m fix și facem $n \rightarrow \infty$. Obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{m!}$$

astfel:

$$s_m \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

Când $m \rightarrow \infty$, $e \leq \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$.

Insumarea seriilor

Calculul sumei seriilor este o problemă care conduce la un rezultat aproximativ

I. Să considerăm seria $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ cu termeni pozitivi pentru care presupunem că $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$ pentru $n > N$.

Avem

$$S - S_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \dots \leq u_{N+1}(1 + k + k^2 + \dots) = \frac{u_{N+1}}{1 - k}$$

deci

$$S - S_N \leq \frac{u_{N+1}}{1 - k}$$

Am arătat astfel că eroarea comisă este inferioară cantității din dreapta.

II. Să considerăm seria alternată convergentă

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1}u_n + \dots$$

Avem

$$s = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \dots - (u_{2n} - u_{2n+1}) - \dots$$

și

$$s = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + \dots$$

Deoarece $u_k > u_{k+1}$ obținem: $s < s_{2n+1}$; $s > s_{2n+2}$.

Dar

$$s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} \text{ și } s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}$$

din care obținem:

$$0 < s - s_{2n} < u_{2n+1}$$

$$0 < s_{2n+1} - s < u_{2n+2}$$

Deci

$$0 < (s - s_n) (-1)^n < u_{n+1},$$

ceea ce arată că dacă adunăm un număr finit de termeni într-o serie alternată convergentă eroarea pe care o comitem este inferioară primului termen neglijat.

Rapiditatea de convergență a unei serii

Definiția 4.2. Seria $\sum_1^\infty u_n$ este mai rapid convergentă decât seria $\sum_1^\infty v_n$

dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{R_n} = 0$ unde

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots \text{ și } R_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots$$

și se numesc resturile seriilor.

O condiție suficientă ca seria $\sum_{i=1}^{\infty} u_n$ să fie mai repede convergent decît seria $\sum_{i=1}^{\infty} v_n$ este ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$$

Pentru demonstrație a se vedea [24]

Transformarea Euler. Fie

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

o serie convergentă unde u_n sînt strict pozitivi.

Seria

$$\frac{u_1}{2} - \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_3 - u_2}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{u_n - u_{n-1}}{2} + \dots$$

este și ea convergentă și are aceeași sumă cu prima.

Într-adevăr observăm că: $S_n^* - S_n = (-1)^n \frac{u_n}{2} \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$.

Exemplu. Seria $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} + \dots$ este o serie

slab convergentă. Pentru a calcula suma ei cu 3 zecimale exacte, luăm în considerație 999 de termeni.

Aplicînd transformarea lui Euler se obține o serie mai rapid convergentă.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) + \dots \\ & \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} + \dots \end{aligned}$$

§ 3. LIMITE DE FUNCȚII ÎN $\mathbb{R}^k$

Fie f o aplicație a mulțimii $X \subset \mathbb{R}^k$ cu valori în $\mathbb{R}^m$ și a_0 un punct de acumulare a mulțimii X .

Definiția 1.3. Funcția f are limita l în punctul a_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, a_0)$ astfel încît:

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon \quad \text{pentru } x \in X \text{ cu } \|x - a_0\| < \eta.$$

Notăm $\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = l$

O definiție echivalentă a limitei unei funcții într-un punct este dată de:

Teorema 1.3. Funcția f are limita l în punctul a_0 dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in X$ ($a_n \neq a_0$), $a_n \rightarrow a_0$ șirul $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ are limita l .

Demonstrație. Presupunem că $\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) = l$ conform definiției.

Fie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in X$ un șir oarecare pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$.

Știm că pentru $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon, a_0)$ astfel încît $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ dacă $x \in X$ și $\|x - a_0\| < \eta$. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ rezultă existența lui N_1 astfel încît $\|a_n - a_0\| < \eta$ pentru $n > N_1$ și, din existența limitei $\|f(a_n) - l\| < \varepsilon$ pentru $n > N_1$ ceea ce arată că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l$.

Reciproc, presupunem că pentru orice șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$, șirul $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ are limita l . Vom proceda prin reducere la absurd: presupunem că $\lim_{x \rightarrow a_0} f(x) \neq l$. În acest caz există $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $\eta > 0$, există $x \in X$ pentru care

$$\|f(x) - l\| > \varepsilon \text{ și } \|x - a_0\| < \eta.$$

Alegînd pentru η valorile $\eta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$ găsim un șir care verifică condiția $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq l$ ceea ce duce la contradicție.

Exemplu. Funcția $f(x, y) = \sin(x + y)^{-1}$, $x + y \neq 0$ nu are limită în punctul $(0, 0)$ deoarece pentru șirul $a_n = \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right)$ convergent la $(0, 0)$, șirul $f(a_n)$ are limita 0, în timp ce pentru șirul $b_n = \left(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{(2n+1)\pi}\right)$ care converge tot către $(0, 0)$, șirul $f(b_n) = \sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n \neq 0$.

Consecință. Dacă punem $a_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{k0})$ și $l = (l_1, l_2, \dots, l_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ definiția dată este echivalentă cu

$$|f_1(x_1, x_2, \dots, x_k) - l_1| < \varepsilon$$

$$|f_2(x_1, x_2, \dots, x_k) - l_2| < \varepsilon$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|f_m(x_1, x_2, \dots, x_k) - l_m| < \varepsilon$$

dacă $\|x - a_0\| < \eta(\varepsilon)$ ceea ce arată că o funcție vectorială are limită într-un punct dacă și numai dacă fiecare din componentele sale are limită în acel punct. Acest lucru rezultă din inegalitatea

$$|f_i(x) - l_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^m (f_i(x) - l_i)^2} \leq \sum_{i=1}^m |f_i(x) - l_i|$$

Exemplu. Studiem limita funcției

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

în punctul $(0, 0)$.

Notăm $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ și calculăm

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} = 2 \sin \theta \cos \theta$$

Deoarece valoarea limitei depinde de θ , funcția f nu are limită în punctul $(0, 0)$.

§ 4. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR ÎN $\mathbb{R}^k$

Considerăm funcția $f: X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ și spațiile $\mathbb{R}^k$ și $\mathbb{R}^m$ înzestrate cu metricile euclidiene. În legătură cu continuitatea funcției f dăm

Definiția 1.4. Funcția f este continuă în punctul $a_0 \in X$ dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a_0)$ există o vecinătate U a lui a_0 astfel ca $f(U) \subset V$.

În cazul particular în care V este o sferă definiția continuității funcției f în a_0 capătă forma

f este continuă în $a_0 \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, a_0)$ astfel încît $\|f(x) - f(a_0)\| < \varepsilon$ pentru $\|x - a_0\| < \eta$.

f este continuă pe X dacă este continuă în fiecare punct din X .

În legătură cu continuitatea funcțiilor are loc

Teorema 1.4. Funcția $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă pe X dacă și numai dacă $f^{-1}(O)$ este mulțime deschisă în X oricare ar fi O mulțime deschisă în $f(X)$.

Demonstrație. Presupunem că f este continuă în X și O este deschisă în $f(X)$. Arătăm că $f^{-1}(O)$ este mulțime deschisă, deci că orice punct $p \in f^{-1}(O)$ este punct interior. Dacă $p \in f^{-1}(O)$, $f(p) \in O$ și cum O este deschisă există o sferă

$$B(f(p); \varepsilon) = \{y; y \in O, \|y - f(p)\| < \varepsilon\}, \quad B(f(p); \varepsilon) \subset O.$$

Deoarece f este continuă în p , există $\eta(\varepsilon, p)$ astfel încît $\|f(p) - y\| < \varepsilon$ dacă $\|p - x\| < \eta$. Am construit astfel o sferă $B(p, \eta) \subset f^{-1}(O)$ ceea ce arată că p este punct interior pentru mulțimea $f^{-1}(O)$.

Reciproc: Să presupunem că $f^{-1}(O)$ este deschisă în X oricare ar fi O deschisă în $f(X)$. Fie $x \in X$ și V o vecinătate a lui $f(x)$. Atunci $f^{-1}(V)$ este vecinătate a lui x și $f(f^{-1}(V)) \subset V$ ceea ce arată că f este continuă în x .

Dacă x_0 este un punct de acumulare pentru mulțimea X are loc

Teorema 2.4. Dacă $a_0 \in X$ este punct de acumulare pentru mulțimea X , f este continuă în a_0 dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a_0)$ pentru orice șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in X$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$.

Demonstrație. Presupunem că $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a_0)$ oricare ar fi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$. Demonstrăm că f este continuă în a_0 prin reducerea la absurd. Facem ipoteza că f nu este continuă în a_0 . Atunci există V a lui $f(a_0)$ careia nu-i corespunde nici o vecinătate U a lui x_0 pentru care $f(U) \subset V$.

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ să alegem $x_n \in B\left(a_0; \frac{1}{n}\right)$ (sfera închisă cu centrul în a_0 și de rază $\frac{1}{n}$) astfel că $f(x_n) \notin V$. Atunci, am găsit un șir x_n pentru care $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a_0$ dar $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(a_0)$. Această contradicție arată că f este continuă în a_0 .

Reciproc, fie f continuă în a_0 și un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$. Fie V o vecinătate a lui $f(a_0)$. Există atunci o vecinătate U a lui a_0 astfel ca $f(U) \subset V$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ există $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca pentru $n > n_0$, $a_n \in U$ și deci pentru $n > n_0$, $f(a_n) \in f(U)$, ceea ce arată că f este continuă în a_0 .

Consecință: Fie $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^k$. Funcția $f: X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă dacă și numai dacă fiecare din funcțiile reale $f_1, f_2, \dots, f_k$ este continuă.

Aceasta rezultă din inegalitatea

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f_j(a_0)| &\leq \|f(x) - f(a_0)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m |f_j(x) - f_j(a_0)|^2} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^m |f_j(x) - f_j(a_0)|. \end{aligned}$$

Pentru a înțelege mai bine continuitatea unei funcții de variabilă vectorială vom defini și noțiunea de continuitate parțială.

Fie $f: X \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ și să considerăm mulțimea

$$X_i = \{x_i \mid x_i \in \mathbb{R}; (a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_k) \in X\}$$

și funcția

$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_k), x_i \in X_i.$$

Funcția f_i este o funcție de o variabilă.

Definiția 2.4. Dacă funcția f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$ spunem că f este continuă parțial în raport cu variabila x_i .

Continuitatea funcției f implică continuitatea parțială în raport cu fiecare variabilă. Reciproca nu este adevărată.

Exemplu. Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă parțial în raport cu variabila x sau cu y în origine dar nu este continuă deoarece:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^3 \cos \theta \sin^2 \theta}{r^2(\cos^2 \theta + r^2 \sin^4 \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 + \sin^2 \theta} \neq 0$$

cînd $\cos \theta = r \sin \theta$ adică atunci cînd punctul (x, y) tinde la $(0, 0)$ pe parabola $x = y^2$.

În legătură cu compunerea funcțiilor continue are loc

Teorema 3.4. Fie $f: X \subset \mathbf{R}^k \rightarrow Y \subset \mathbf{R}^m$ continuă în $x_0 \in X$, $g: Y \subset \mathbf{R}^m \rightarrow Z \subset \mathbf{R}^p$, g continuă în $f(x_0) \in Y$. Funcția $g \circ f$ este continuă în x_0 .

Demonstrație. Fie W o vecinătate a lui $g \circ f(x_0) = g(f(x_0))$. Deoarece g este continuă există o vecinătate V a lui $f(x_0)$ astfel încît $g(V) \subset W$. Deoarece f este continuă în x_0 , există U o vecinătate a lui x_0 astfel ca $f(U) \subset V$. Am găsit astfel o vecinătate U a lui x_0 pentru care $g \circ f(U) \subset g(f(U)) \subset g(V) \subset W$.

Exemplu: Funcția $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ prin

$$f(x, y) = (u, v) = (x^2 + y^2, xy)$$

și $g: \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ $g(u, v) = \frac{v}{u}$ sînt funcții continue pe mulțimile lor de definiție.

Funcția $g \circ f = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ definită pe $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ este continuă în orice punct din mulțimea de definiție.

Proprietăți ale funcțiilor continue.

Teorema 4.4. Fie f o funcție definită pe X cu valori în Y continuă și $A \subset X$ o mulțime conexă. În aceste condiții $f(A)$ este conexă.

Demonstrație. Presupunem că $f(A)$ nu este conexă. Există atunci mulțimile deschise O_1 și O_2 astfel încît $f(A) \subset O_1 \cup O_2$ și $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. În acest caz $A \cap f^{-1}(O_1)$ și $A \cap f^{-1}(O_2)$ sînt mulțimi deschise nevide pentru care

$$A \subset (A \cap f^{-1}(O_1)) \cup (A \cap f^{-1}(O_2))$$

și

$$(A \cap f^{-1}(O_1)) \cap (A \cap f^{-1}(O_2)) = \emptyset.$$

De aici ar rezulta că A nu este conexă.

Teorema 5.4. Fie A conexă și f o funcție continuă definită pe A cu valori în $\mathbf{R}$. Fie $a, b \in f(A)$ cu $a < b$. În aceste condiții pentru orice $a < c < b$ există $x_0 \in A$ cu $f(x_0) = c$.

Demonstrație. $f(A)$ este conexă și este o submulțime a lui $\mathbf{R}$, deci este un segment.

Această proprietate se numește *proprietatea lui Darboux* și nu o au numai funcțiile continue.

Consecință. Fie $f: [a, b]$, $a \cdot b < 0$. Luând $c = 0$ rezultă că o funcție continuă se anulează când trece de la valori pozitive la valori negative și invers.

Teorema 6.4. Dacă $f: X \subset \mathbf{R}^n$ este continuă pe X și X este compactă, atunci $f(X)$ este mulțime compactă.

Demonstrație. Fie $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ o acoperire deschisă a lui $f(X)$. Atunci, $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$, $O_i \in O$ este o acoperire deschisă a lui X și cum X este compactă, există o acoperire finită, $f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \dots, f^{-1}(O_n)$ astfel ca:

$$X \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(O_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n O_i\right).$$

Deci

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^n O_i.$$

Consecință. Dacă $f: X \rightarrow \mathbf{R}$, X compactă și f funcție continuă atunci f este mărginită și există 2 puncte a, b în X astfel ca

$$f(a) = \sup \{f(x), x \in X\}$$

$$f(b) = \inf \{f(x), x \in X\}.$$

Demonstrație. $f(X)$ este o mulțime compactă din $\mathbf{R}$, deci $f(X)$ este închisă și mărginită. Fie $\alpha = \sup f(X)$, $\beta = \inf f(X)$. Deoarece $f(X)$ este mărginită avem $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Din faptul că $f(X)$ este închisă avem $\alpha, \beta \in f(X)$ și deci $a = f^{-1}(\{\alpha\})$, $b = f^{-1}(\{\beta\})$.

Teorema 7.4. Fie f o aplicație continuă biunivocă a mulțimii X compacte din $\mathbf{R}^k$ cu valori în $Y \subset \mathbf{R}^m$. Atunci aplicația inversă f^{-1} definită pe Y de egalitatea:

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in X$$

este continuă.

Demonstrație. Este suficient să arătăm că $f(O)$ este mulțime deschisă în Y pentru orice mulțime deschisă O în X .

Să fixăm o asemenea mulțime O , deschisă în X ; CO este închisă și deci este compactă. Urmează că $f(CO)$ este o submulțime compactă a mulțimii Y . Cum f este biunivocă mulțimea $f(O)$ este complementara mulțimii $f(CO)$ deci $f(O)$ este deschisă.

Continuitatea uniformă

Definiția 3.4. Fie f o aplicație a mulțimii $X \subset \mathbf{R}^k$ în mulțimea $Y \subset \mathbf{R}^m$. Spunem că f este uniform continuă pe X dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\eta(\epsilon) > 0$ astfel ca

$$\|f(x') - f(x'')\| < \epsilon$$

pentru orice $x', x'' \in X$ pentru care $\|x' - x''\| < \eta(\epsilon)$.

Continuitatea uniformă spre deosebire de continuitatea punctuală este o proprietate a funcțiilor pe o mulțime. În continuitatea punctuală η depinde de ε dar și de punct.
Are loc

Teorema 8.4. (Heine). O funcție continuă f definită pe o mulțime compactă $X \subset \mathbb{R}^k$ cu valori în $\mathbb{R}^m$ este uniform continuă pe X .

Demonstrație. Presupunem că funcția f nu este uniform continuă pe X . Există $\varepsilon > 0$ și $x', x'' \in X$ astfel încât pentru orice η pentru care $\|x' - x''\| < \eta$ să aibă loc $\|f(x') - f(x'')\| > \varepsilon$.

Să dăm lui η valorile succesive:

$\eta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ Pentru $\eta = \frac{1}{n}$ există deci punctele x'_n și x''_n astfel

$$\|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n} \text{ și } \|f(x'_n) - f(x''_n)\| > \varepsilon.$$

Deoarece X este o mulțime compactă se poate extrage din șirul x'_n un subșir $x'_{n_1}, x'_{n_2}, \dots, x'_{n_k}, \dots$ convergent către $x_0 \in X$.

Cum $\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\| < \frac{1}{n_k}$ avem:

$$\|x''_{n_k} - x_0\| < \|x''_{n_k} - x'_{n_k}\| + \|x'_{n_k} - x_0\| \rightarrow 0$$

ceea ce arată că subșirul $(x''_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent către $x_0 \in X$.

Funcția f este definită și continuă pentru $x = x_0$ deci fiind $\varepsilon > 0$ dat putem determina $\eta_0 > 0$ astfel încât:

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

cînd $\|x - x_0\| < \eta_0$. Deoarece x'_{n_k} converge la x_0 și x''_{n_k} converge la x_0 avem:

$$\|x'_{n_k} - x_0\| < \eta_0, \quad \|x''_{n_k} - x_0\| < \eta_0$$

și

$$\|f(x'_{n_k}) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f(x''_{n_k}) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de unde

$$\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\| < \varepsilon$$

ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă f uniform continuă.

Exemple. 1) Funcția f definită prin

$$f(x) = \ln x, \quad x \in (0, 1)$$

nu este uniform continuă deoarece pentru $x'_n = e^{-n}$, $x''_n = e^{1-n}$, avem pentru orice η :

$$|x_n - x''_n| = e^{-n}(e - 1) < \eta,$$

pentru orice η dacă alegem n convenabil și în același timp $|f(x'_n) - f(x''_n)| = 1$.

Aceasta arată că f nu este uniform continuă în $(0, 1)$.

$$2) \text{ Fie } f(x, y) = \left(\frac{x-y}{x+y}, \frac{x}{y} \right), \quad (x, y) \in (1, 2) \times (1, 2).$$

Pentru a arăta că această funcție e uniform continuă scriem:

$$\begin{aligned} \|f(x', y') - f(x'', y'')\| &= \sqrt{\left(\frac{x' - y'}{x' + y'} - \frac{x'' - y''}{x'' + y''} \right)^2 + \left(\frac{x'}{y'} - \frac{x''}{y''} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left[\frac{2(x'y'' - y'x'')}{(x' + y')(x'' + y'')} \right]^2 + \left[\frac{x'y'' - y'x''}{y'y''} \right]^2} = \\ &= |x'y'' - y'x''| \sqrt{\frac{4}{(x' + y')^2(x'' + y'')^2} + \frac{1}{y'^2y''^2}} \leq \\ &\leq |x'(y'' - y') - y'(x'' - x')| \frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{5}(|y'' - y'| + |x'' - x'|) < \\ &< 2\sqrt{5} \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\text{De aici rezultă } \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}};$$

$$\text{deci } \eta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}}$$

ceea ce arată că f este uniform continuă pe $(1, 2) \times (1, 2) \subset \mathbb{R}^2$.

§ 5. FUNCȚII CU VARIAȚIE MĂRGINITĂ.

Fie f o funcție reală $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Diferența $|f(b) - f(a)|$ dă o imagine a modului în care se modifică valorile funcției pe $[a, b]$. Vom încerca să îmbunătățim această evaluare.

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și

$$V_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

Numărul V_{Δ} se numește variația funcției f relativă la diviziunea Δ .

Ce se întâmplă când se trece de la o diviziune Δ la alta diviziune Δ' , mai fină? În acest sens enunțăm

Teorema 1.5. Dacă Δ' este mai fină decât Δ atunci $V_{\Delta} \leq V_{\Delta'}$.

Demonstrație. Fie un interval oarecare $[x_i, x_{i+1}]$ din diviziunea Δ . Să presupunem că diviziunea Δ' conține în intervalul, $[x_i, x_{i+1}]$ un punct de diviziune x'_i .

Contribuția lui $[x_i, x_{i+1}]$ în V_Δ este $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ iar contribuția lui $[x_i, x_{i+1}]$ în $V_{\Delta'}$ este

$$|f(x_{i+1}) - f(x'_i)| + |f(x'_i) - f(x_i)|.$$

Cum relația între ele este:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x'_i)| + |f(x'_i) - f(x_i)|$$

rezultă

$$V_\Delta \leq V_{\Delta'}.$$

Deci prin trecerea de la o diviziune la altă diviziune mai fină variația lui f crește sau stă pe loc.

În legătură cu aceasta dăm

Definiția 1.5. O funcție reală f , definită pe intervalul compact $[a, b]$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$ dacă există M real astfel încît pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$, $V_\Delta < M$.

Marginea superioară a mulțimii $\{V_\Delta\}$ se numește variația totală a funcției pe $[a, b]$ și se notează $\bigvee_a^b f$.

2 clase de funcții cu variație mărginită sînt indicate de

Teorema 2.5. O funcție f monotonă și continuă pe $[a, b]$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie f crescătoare pe $[a, b]$ și $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$. Deoarece f este crescătoare rezultă $f(x_i) \leq f(x_{i+1})$. Deci

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = f(b) - f(a).$$

Aceasta arată că pentru orice Δ , $V_\Delta < M$; deci f este cu variație mărginită.

Teorema 3.5. O funcție f lipschitziană pe $[a, b]$ (adică o funcție pentru care $(\forall) x', x'' \in [a, b], |f(x') - f(x'')| \leq k|x' - x''|$) este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$. Din ipoteză există k astfel ca:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq k|x_{i+1} - x_i|$$

pentru $i = 0, 1, \dots, n-1$; deci

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq k \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = k(b - a)$$

și f este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Funcțiile cu variație mărginită au următoarele 2 proprietăți

Proprietatea 1. Dacă f și g sînt cu variație mărginită pe $[a, b]$, iar α și β sînt numere reale atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$.

Demonstrație. Putem scrie:

$$\begin{aligned} V_{\Delta}(\alpha f + \beta g) &= \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha f(x_{i+1}) + \beta g(x_{i+1}) - (\alpha f(x_i) + \beta g(x_i))] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + \beta(g(x_{i+1}) - g(x_i))| \leq \\ &\leq |\alpha| \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |\beta| \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| = \\ &= |\alpha| V_{\Delta}(f) + |\beta| V_{\Delta}(g) \end{aligned}$$

Proprietatea 2. Dacă f este cu variație mărginită pe $[a, b]$ iar $[c, d] \subset [a, b]$ atunci f este cu variație mărginită pe $[c, d]$.

Demonstrație. Fie $\Delta' = (c = x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} = d)$ o diviziune a intervalului $[c, d]$ și fie

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 = c < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n-1} = d \leq x_n = b)$$

o diviziune a lui $[a, b]$.

Se poate scrie:

$$V_{\Delta'} = \sum_{i=1}^{n-2} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = V_{\Delta}$$

și cum f este cu variație mărginită pe $[a, b]$ rezultă că există M număr real astfel încît $V_{\Delta} < M$; deci $V_{\Delta'} < M$.

Consecință. Dacă f este cu variație mărginită pe $[a, b]$ atunci funcția

$$V(x) = \bigvee_a^x f,$$

este crescătoare pe $[a, b]$.

Are loc

4.5. *Teorema de structură a lui Jordan.* Fiind dată o funcție reală f cu variație mărginită pe $[a, b]$ există 2 funcții φ și ψ crescătoare pe $[a, b]$ astfel încît $f = \varphi - \psi$.

Demonstrație. Punem $\varphi(x) = \bigvee_a^x f$; φ este crescătoare pe $[a, b]$. Vom arăta că funcția $\psi = \varphi - f$ este de asemenea crescătoare pe $[a, b]$. Putem scrie:

$$\begin{aligned} \psi(x+h) - \psi(x) &= \left(\bigvee_a^{x+h} f - f(x+h) \right) - \left(\bigvee_a^x f - f(x) \right) = \\ &= \left(\bigvee_a^{x+h} f - \bigvee_a^x f \right) - (f(x+h) - f(x)). \end{aligned}$$

Dar

$$\bigvee_a^{x+h} f = \bigvee_a^x f + \bigvee_x^{x+h} f;$$

deci

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \bigvee_x^{x+h} f - (f(x+h) - f(x)) \geq 0$$

Consecințe. 1) Dacă f și g sînt cu variație mărginite pe $[a, b]$ atunci $\varphi = f \cdot g$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$. Aceasta se vede dacă scriem $f = u - v$ și $g = u^* - v^*$ unde u, v, u^*, v^* sînt funcții monotone pe $[a, b]$. Avem $fg = uu^* + vv^* - (uv^* + vu^*)$.

2) O funcție cu variație mărginită pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$. Aceasta rezultă din faptul că o funcție cu variație mărginită se scrie ca diferența a 2 funcții monotone pe $[a, b]$ și o funcție monotonă pe un compact este mărginită.

Exemple. 1) funcția $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \ln x, & x \in (0, 1) \end{cases}$ nu este cu variație mărginită deoarece nu este mărginită.

2) funcția $f(x) = \operatorname{arctg} (1 - x^3)$, $x \in [-1, 1]$ este cu variație mărginită deoarece

$$|f'(x)| = \frac{+3x^2}{1 + (1 - x^3)^2}$$

este mărginită deci lipschitziană.

§ 6. INTERPOLAREA FUNCȚIILOR

Problema aproximării unei funcții apare în aproape toate cercetările tehnice. Tehnicile de aproximare sînt dintre cele mai diverse; un loc deosebit îl ocupă însă tehnica interpolării funcțiilor. În ce constă această problemă a interpolării?

Să presupunem că se cunosc valorile unei funcții necunoscute în diverse puncte $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se cer valorile funcției în alte puncte x , diferite de cele n . Să presupunem că funcția de aproximație va fi de forma:

$$g(x; a_1, a_2, \dots, a_n)$$

și că parametrii $a_1, a_2, \dots, a_n$ vor fi determinați din condițiile:

$$\begin{cases} g(x_1; a_1, a_2, \dots, a_n) = y_1 \\ \vdots \\ g(x_n; a_1, a_2, \dots, a_n) = y_n \end{cases}$$

Aceasta este o problemă de *interpolare*. Funcția g poate fi de diferite forme. O bună aproximare este dată de *funcția polinom*: Vom prezenta în continuare

Formula de interpolare a lui Lagrange

Să presupunem că se cunosc valorile $y_0, y_1, \dots, y_n$ ale unei funcții f definită pe $[a, b] \subset \mathbf{R}$ în punctele $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.

Se cere să se construiască polinomul $L_n(x)$ de grad egal sau inferior lui „ n ”, polinom care să ia în punctele $x_1, \dots, x_n$ valorile $y_1, y_2, \dots, y_n$ adică:

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Vom rezolva problema parțială: construim un polinom $p_i(x)$ astfel ca

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i. \end{cases}$$

Polinomul căutat se anulează în punctele $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$; deci este de forma:

$$p_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

unde C_i sînt constante.

Luînd $x = x_i$ și ținînd seama că $p_i(x_i) = 1$ obținem

$$c_i(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = 1,$$

de unde:

$$c_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

Cu aceste valori ale constantelor obținem

$$p_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)}.$$

Căutăm polinomul de interpolare de forma:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n p_i(x) y_i$$

$L_n(x)$ construit astfel verifică condițiile:

— gradul lui $L_n(x)$ este mai mic sau egal cu n .

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^n p_i(x_j) y_i = p_j(x_j) y_j = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Dacă ținem seama de expresia polinoamelor $p_i(x)$ obținem

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Polinomul astfel construit se numește polinomul lui *Lagrange* de interpolare. Demonstrăm unicitatea polinomului lui Lagrange prin metoda reducerii la absurd:

Fie $L_n^*(x)$ un polinom $L_n(x)$ de grad egal sau inferior cu n și astfel ca

$$L_n^*(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

În această situație polinomul

$$Q_n(x) = L_n(x) - L_n^*(x)$$

de grad egal (sau inferior) cu „ n ” se anulează în „ $n+1$ ” puncte $x_0, x_1, \dots, x_n$ deci

$$Q_n(x) \equiv 0,$$

de unde rezultă $L_n^*(x) = L_n(x)$.

Evaluarea erorii introdusă de polinomul lui Lagrange

Să notăm

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

Atunci:

$$\omega_n'(x) = \sum_{k=1}^n \left[\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (x - x_j) \right] \text{ și } \omega_n'(x_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j).$$

Cu aceste notații polinomul lui Lagrange se scrie

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i) \omega_n(x)}{\omega_n'(x_i) (x - x_i)}.$$

Pentru a evalua eroarea dată de

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

să presupunem că există $f^{(n)}(x)$ și că ea este continuă când $x \in [a, b]$.

Notăm

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - K \omega_n(x),$$

K fiind ales din condiția $\varphi(x) = 0$.

Avem

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_n(x)}$$

Pentru un asemenea K , funcția $\varphi(x)$ se anulează în punctele $x_0, x_1, \dots, x_n$. Aplicînd teorema lui Rolle funcției φ pe fiecare din aceste intervale obținem că φ' se anulează în cel puțin n puncte. Continuînd raționamentul de n ori ajungem la concluzia că $\varphi^{(n)}(x)$ se anulează cel puțin într-un punct $\xi \in [\alpha, \beta]$, unde $\alpha = \min(x_0, x_1, \dots, x_n, x)$ și $\beta = \max(x_0, \dots, x_n, x)$. Deoarece

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - Kn!$$

condiția $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$ atrage după sine

$$K = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Relația $\varphi(x) = 0$ se scrie

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi) \omega_n(x)}{n!}, \quad \xi \in [\alpha, \beta].$$

Exemplu. Să se determine eroarea care se comite cînd se calculează $\sqrt[3]{67}$ cu ajutorul polinomului lui Lagrange alegînd ca puncte de interpolare punctele: $x_1 = 64 = 4^3$; $x_2 = 68,921 = 4,1^3$; $x_3 = 74,088 = 4,2^3$; $x_4 = 79,507 = 4,3^3$

$$\text{Se știe că } f(x) - L_4(x) = \frac{f^{(4)}(\xi) \prod_{i=1}^4 (x - x_i)}{4!}, \quad x_1 < \xi < x_4.$$

$$\text{În acest caz } f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{3} x^{-\frac{11}{3}},$$

$$|f^{(4)}(x)| = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}{3^4} \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \right)^{11} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}{3^4} \cdot \frac{1}{4^{11}} < \frac{1}{10^5}.$$

Obținem:

$$|f(x) - L_4(x)| < \frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{4!} |(67 - 64)(67 - 68,92)(67 - 74,088) \cdot$$

$$(67 - 79,507)| = \frac{3 \cdot 189}{4! 10^5} < \frac{24}{10^5} < \frac{1}{10^2}.$$

Astfel, valoarea numerică a lui $\sqrt[3]{67}$ calculată cu polinomul de interpolare a lui Lagrange este:

$$\begin{aligned} L_n(67) &= p_1(67) y_1 + p_2(67) y_2 + p_3(67) y_3 + p_4(67) y_4 = \\ &= 4p_1(67) + 4,1p_2(67) + 4,2p_3(67) + 4,3p_4(67). \end{aligned}$$

Polinomul lui Newton de interpolare

Vom prezenta în continuare o altă formă a polinomului lui Lagrange. Pentru aceasta vom introduce noțiunile de diferență finită și putere generalizată.

Definiția 1.6. Fie $y = f(x)$ și $\Delta x = h$. Expresia

$$\Delta y = f(x + h) - f(x)$$

se numește prima diferență a funcției f .

La fel se definesc diferențele de ordin superior prin relația:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \quad n = 2, 3 \dots$$

Astfel

$$\Delta^2 y = \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Proprietăți ale operatorului Δ care asociază funcției $y = f(x)$, funcția $y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$1) \Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$$

$$2) \Delta(\alpha u) = \alpha \Delta(u), \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

$$3) \Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{m+n} u.$$

Definiția 2.6. Se numește putere generalizată „ n ” a lui x , produsul de n factori

$$x^{[n]} = x(x - h)(x - 2h) \dots (x - (n - 1)h)$$

Punem $x^{[0]} = 1$.

Diferențele puterii generalizate sînt

$$\begin{aligned} \Delta x^{[n]} &= (x + h)^{[n]} - x^{[n]} = \\ &= (x + h)x \dots (x - (n - 2)h) - x(x - h) \dots (x - (n - 1)h) = \\ &= x(x - h) \dots [x - (n - 2)h]nh = nhx^{[n-1]}, \end{aligned}$$

de unde $\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}$.

Diferența de ordinul doi este

$$\Delta^2 x^{[n]} = nh\Delta x^{[n-1]} = n(n - 1)h^2 x^{[n-2]}$$

și, în general

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n - 1) \dots (n - k + 1)h^k x^{[n-k]}$$

unde $k = 1, 2, \dots, n$.

Presupunem sistemul de valori ale funcției dat de:

$$y_i = y(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n \text{ cu } x_i = x_0 + ih.$$

Căutăm polinomul de interpolare de forma:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ &\dots + a_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1), \end{aligned}$$

sau,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n)^{[1]} + a_2(x - x_n)^{[2]} + \dots + a_n(x - x_n)^{[n]}.$$

Calculăm coeficienții $a_1, a_2, \dots, a_n$ astfel ca $P_n(x_i) = y_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Pentru aceasta este suficient și necesar ca:

$$\Delta^i P_n(x_{n-i}) = \Delta^i y_{n-i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Avem:

$$P_n(x_n) = y_n = a_0$$

$$\Delta P_n = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2h(x - x_{n-1})^{[1]} + \dots + a_n n h (x - x_1)^{[n-1]} \text{ și}$$

$$\Delta P_n(x_{n-1}) = \Delta y_{n-1} = a_1 h.$$

Deci $a_1 = \Delta y_{n-1}/h$.

Pentru a 2-a diferență a lui $P_n(x)$,

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 2! h^2 + a_3 3 \cdot 2 h^2 (x - x_{n-2})^{[1]} + \dots + a_n n(n-1) h^2 (x - x_1)^{[n-2]}.$$

Punînd $x = x_{n-2}$,

$$\Delta^2 P_n(x_{n-2}) = \Delta^2 y_{n-2} = a_2 2! h^2$$

deci,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2}.$$

În general se arată prin recurență că

$$a_i = \frac{\Delta^i y_{n-i}}{i! h^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Înlocuind în expresia lui $P_n(x)$ acești coeficienți obținem:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{1! h} (x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2! h^2} (x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots \\ & \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n} (x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \end{aligned}$$

Polinomul $P_n(x)$ se numește *polinomul lui Newton*

Pentru calculul diferențelor avem relațiile:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n;$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-2;$$

.....

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-k.$$

Exerciții propuse

1. *Lema lui Stolz*. Dacă $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere oarecare, dacă $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere pozitive strict crescător și divergent și dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l$$

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$

Ind. se aplică definiția limitei unui șir

2. Să se calculeze

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \dots + (\ln n)^2}{n^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Ind: se aplică ex. 1.

3. Dacă $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de numere pozitive și dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ atunci

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Să se calculeze folosind acest rezultat,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \dots (2n)}$$

Ind. Se aplică ex. 1 pentru șirul $(\ln a_n)$

4. Să se arate că șirul de termen general $a_n = \frac{4 - a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$ cu $a_1 = 1$ este monoton și mărginit. Să i se determine limita. $R: l = 2$

5. Să se studieze natura seriilor:

$$\sum_1^\infty n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right), \quad \sum_1^\infty \left(\sqrt{1 + n^2} - n - \frac{k}{n} \right)$$

$$\sum_1^\infty \frac{1! + 2! + \dots + (n-2)!}{n!}, \quad \sum_1^\infty \left(\operatorname{ch} \frac{n+1}{n^2+1} - 1 \right)$$

6. *Criteriul logaritm*. Dacă $\sum_1^\infty u_n$ este o serie cu termeni pozitivi pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n} = l$$

atunci, seria este convergentă pentru $l > 1$ și divergentă pentru $l < 1$.

Ind. Se aplică definiția limitei unui șir și criteriul comparației

7. Natura seriei $\sum_2^{\infty} \ln n \cdot \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right)$

Ind. se aplică ex. 6.

8. Să se studieze convergența simplă și absolută pentru seria

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{1+n^\alpha}}{n + \sqrt[3]{n^2}}$$

R: Absolut convergentă pentru $\alpha < 0$ și simplu convergentă pentru $\alpha < 1$.

9. Să se studieze continuitatea funcțiilor

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}, & x^2+y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

10. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor

$$f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$f(x) = \arctg \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (1, \infty)$$

11. Să se stabilească care din următoarele funcții este cu variație mărginită.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin x \sin \frac{1}{x}, & x \in \left(0, \frac{2}{\pi} \right] \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2 + |x|}, \quad x \in [-1, 1]$$

CAPITOLUL III

CALCUL DIFERENȚIAL ÎN $\mathbf{R}^k$

§ 1. DERIVATE PENTRU FUNCȚII DEFINITE ÎN $\mathbf{R}$. FORMULA LUI TAYLOR

Fie $f: X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $x_0 \in \overset{\circ}{X}$, f continuă în x_0 .

Definiția 1.1. Funcția f este derivabilă în punctul $x_0 \in \overset{\circ}{X}$ dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ există și este finită}$$

Notăm limita cu $f'(x_0)$ sau $\frac{df(x_0)}{dx}$

Funcția $f: X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este derivabilă în $\overset{\circ}{X}$ dacă este derivabilă în orice punct din $\overset{\circ}{X}$.

Să presupunem că f este derivabilă în $\overset{\circ}{X}$ și fie f' derivata sa. Pentru f' se poate pune de asemenea problema derivării ei.

Definiția 2.1. Dacă funcția f' există într-o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 și dacă

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

există, atunci această limită se numește derivata de ordinul doi a funcției f în punctul x_0 . O notăm cu $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Prin recurență obținem definiția derivatei de un ordin oarecare „ n ” a unei funcții.

Definiția 3.1. Dacă funcția f este derivabilă de „ $n - 1$ ” ori pe o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 și dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă în punctul x_0 , atunci

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in V(x_0)}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f_{(x_0)}^{(n)}$$

Derivata de ordin „ n ” a funcției f se notează $f^{(n)}$ sau $\frac{d^n f}{dx^n}$

Exemple. 1) Funcția $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ admite derivate de orice ordin și

$$f_{(x)}^{(n)} = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right), \quad n \in \mathbf{N}$$

2) Dacă $u: X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ și $v: X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ sînt funcții derivabile de „ n ” ori pe X atunci

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \dots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + v^{(n)}u.$$

Această formulă rezultă prin recurență: avem

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Presupunem că

$$\begin{aligned} (uv)^{(n-1)} &= u^{(n-1)}v + C_{n-1}^1 u^{(n-2)}v' + \dots + C_{n-1}^k u^{(n-k-1)}v^{(k)} + \\ &+ \dots + C_{n-1}^{n-1} u \cdot v^{(n-1)} \end{aligned}$$

și derivăm această relație:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= u^{(n)}v + u^{(n-1)}v' + C_{n-1}^1 u^{(n-1)}v' + C_{n-1}^1 u^{(n-2)}v'' + \\ &+ \dots + C_{n-1}^k u^{(n-k)}v^{(k)} + C_{n-1}^k u^{(n-k-1)}v^{(k+1)} + \dots + C_{n-1}^{n-1} u \cdot v^{(n)} = \\ &= u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \dots + \underbrace{(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})}_{C_n^k} u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)} \end{aligned}$$

Polinomul lui Taylor. Fie $f: [a, b] \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, f derivabilă de „ $n+1$ ” ori în punctul $x_0 \in (a, b)$. Asociem funcției f polinomul:

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f_{(x_0)}^{(n)}$$

numit *polinomul lui Taylor* corespunzător funcției f .

Să vedem în ce sens aproximează polinomul Taylor funcția f .

Să notăm $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, restul polinomului Taylor. Obținem,

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f_{(x_0)}^{(n)} + R_n(x).$$

Aceasta se numește *formula lui Taylor*.

Ne rămîne să evaluăm restul $R_n(x)$

Observăm că $\lim_{x \rightarrow x_0} T_n(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ și deci $\lim_{x \rightarrow x_0} R_n(x) = 0$.

Vom arăta că dacă f are derivată de ordinul „ n ”

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

Demonstrăm prin inducție:

$$\begin{aligned} \text{Pentru } n = 1, \text{ obținem } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \frac{x - x_0}{1} f'(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0 \end{aligned}$$

Presupunem că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n-1}(x)}{(x - x_0)^{n-1}} = 0$$

Calculăm

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

unde am notat $g(x) = (x - x_0)^n$ și am observat că $R_n(x_0) = 0$ și $g(x_0) = 0$.

Aplicînd teorema lui Cauchy acestui raport există ξ , cu $|\xi - x_0| < |x - x_0|$ astfel ca,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R'_n(\xi)}{g'(\xi)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(\xi) - f'(x_0) - \frac{x - x_0}{1!} f''(x_0) - \dots - \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)}{n(\xi - x_0)^{n-1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n-1}^*(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}} \end{aligned}$$

Am notat $R_{n-1}^*(\xi)$ expresia de la numărător care observăm că reprezintă restul de ordinul „ $n - 1$ ” în formula lui Taylor scrisă pentru funcția f' în punctul ξ . Cînd $x \rightarrow x_0$, $\xi \rightarrow x_0$ și, în baza ipotezei de inducție

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_{n-1}^*(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}} = 0.$$

Ținînd seama de acest rezultat putem enunța

Teorema 1.1. Dacă f este de „ n ” ori derivabilă în punctul $x_0 \in [a, b]$, există o funcție φ definită în $[a, b]$ astfel ca

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$$

și deci pentru orice $x \in X$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \varphi(x).$$

Demonstrație. Observăm că

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!} \varphi(x)$$

și deci, $\varphi(x) = n! \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. Din cele arătate mai sus rezultă $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$.

Vom stabili alte forme ale restului în formula lui Taylor.

Presupunem că f este derivabilă de „ $n+1$ ” ori pe (a, b) . Fie x_0 și x două puncte arbitrare fixate din $[a, b]$ și p un număr natural oarecare.

Luăm restul $R_n(x)$ de forma:

$$R_n(x) = (x-x_0)^p K$$

și atunci formula lui Taylor devine:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^p K.$$

Definim pe $[a, b]$ o funcție derivabilă astfel:

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!} f'(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) + (x-t)^p K.$$

Observăm că $\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x)$ și, cum φ este derivabilă pe $[x, t] \subset [a, b]$ există, conform teoremei lui Rolle, cel puțin un punct c pentru care $\varphi'(c) = 0$. Dar,

$$\varphi'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) - p(x-t)^{p-1} K.$$

Facem $t = 0$ și obținem:

$$K = \frac{(x-c)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(c); \quad c = t + \theta(x-t).$$

Înlocuind această valoare în $R_n(x)$,

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^p (x-c)^{n-p+1}}{n! p} f^{(n+1)}(c).$$

Luând $p = 1$ se obține $R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-c)^n}{n!} f^{(n+1)}(c)$ numit restul în forma lui Cauchy.

Pentru $p = n+1$ obținem

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

restul în forma lui Lagrange.

În particular, dacă $0 \in (\alpha, \beta)$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta)$$

unde $0 < \theta < x$ (θ depinde de x și de n)

Exemplu. Să se calculeze $\sqrt{250}$ cu două zecimale exacte. Să se stabilească eroarea.

Considerăm funcția $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ și $x_0 = 225$

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{2^n} x^{-n+\frac{1}{2}}$$

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} c^{-\frac{2n+1}{2}} \right| < \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} 15^{2n+1}} < \frac{1}{10^2},$$

deoarece $225 < c < 250$. Obținem $n = 2$. Din formula lui Taylor,

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{225} + \frac{x-225}{1!} f'(225) + \frac{x-225}{2!} f''(225) \text{ și pentru } x = 250$$

$$\sqrt{250} \simeq 25 + \frac{25}{2 \cdot 13} - \frac{25^2}{2! \cdot 4 \cdot 15^3} = 25,76.$$

Aplicații ale formulei lui Taylor

1. Convexitatea și concavitata unei curbe

Fie $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$. Semnul primei derivate ne indică dacă funcția f este crescătoare sau descrescătoare.

Funcția f poate crește însă în moduri diferite.

Astfel: funcția este crescătoare pe intervalul $[a, b]$ dar graficul ei rămâne sub tangenta la curbă dusă în fiecare punct al ei sau funcția este descrescătoare pe $[a, b]$ și graficul se păstrează deasupra tangentei la curbă. În primul caz spunem că f este concavă pe $[a, b]$ și în al 2-lea caz f este convexă.

Definiția 1.1. Un punct în care tangenta traversează graficul se numește punct de inflexiune.

Derivatele de ordin superior ne dau indicații asupra acestei comportări a funcției.

Presupunem f derivabilă de $n+1$ ori în (a, b) , $x_0 \in (a, b)$ și $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ tangenta la grafic în punctul x_0 .

Diferența

$$E = f(x_0 + h) - f(x_0) - hf'(x_0), \quad x = x_0 + h$$

ne indică poziția tangentei față de grafic (fig. 7 a, fig. 7 b)

Formula lui Taylor conduce la dezvoltarea:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

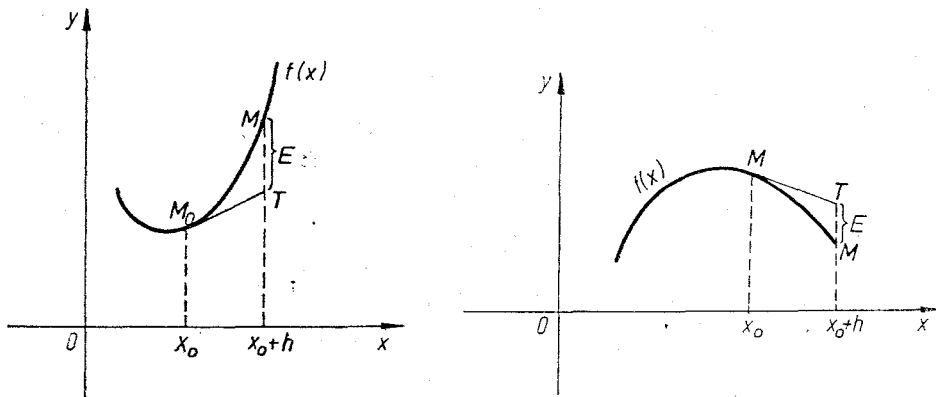


Fig. 7 a, b

și cu aceasta E devine

$$E = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Dacă $f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$; $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

$$E = \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \right].$$

Dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, $n = 2m$, $E > 0$ deci, în vecinătatea punctului x_0 curba este concavă.

Dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, $n = 2m$, $E < 0$ curba este convexă. Pentru $n = 2m + 1$, dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci $E > 0$ pentru $h > 0$ și $E < 0$ pentru $h < 0$.

Dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, $n = 2m + 1$ atunci $E < 0$ pentru $h > 0$ și $E > 0$ pentru $h < 0$.

Punctul x_0 este în acest caz un punct de inflexiune. Dăm următoarea

Definiția 5.1. Funcția $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ este convexă în $[a, b]$ dacă pentru orice două puncte x' , $x'' \in (a, b)$, $x'' > x'$ și orice $t \in [0, 1]$,

$$f(tx' + (1-t)x'') \leq tf(x') + (1-t)f(x'')$$

proprietate care ilustrează geometric poziția tangentei sub grafic.

2. condițiile suficiente de extrem

Se știe că punctele de extrem se găsesc printre soluțiile primei derivate. Care din aceste soluții conduc la puncte de extrem și ce fel de extreme sînt acestea obținem folosind Formula lui Taylor.

Să presupunem că $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ și $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.
Din formula lui Taylor,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n} f^{(n+1)}(\xi) \right]$$

- 1) dacă $n = 2m$ și $f^{(n)}(x_0) > 0$ punctul x_0 este punct de minim.
- 2) dacă $n = 2m$, $f^{(n)}(x_0) < 0$, punctul x_0 este un punct de maxim.
- 3) dacă $n = 2m + 1$, $f^{(2m+1)}(x_0) \neq 0$, punctul x_0 este un punct de inflexiune.

Exemple. Să se determine extremele funcției

$$f(x) = x^n \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Calculăm

$$f'(x) = x^{n-1}(n+x)e^x$$

Din $f'(x) = 0$ rezultă $x_1 = 0$ (răd. multiplă) $x_2 = -n$.

Pentru a vedea dacă aceste puncte sînt puncte de extrem calculăm

$$f''(-n) = (-n)^{n-1} e^{-n} = (-1)^{n-1} n^{n-1} e^{-n}.$$

Deci pentru n par punctul $x_2 = -n$ este punct de maxim, pentru n impar $x_2 = -n$ este punct de minim.

Deoarece $x_1 = 0$ este rădăcină multiplă de ord. „ $n-1$ ” pentru $f'(x) = 0$, vom avea $f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$

Calculăm

$$f^{(n)}(x) = n! e^x + C_n^n n! x e^x + \dots + x^n e^x$$

și $f^{(n)}(0) = n! > 0$ ceea ce arată că $x = 0$ este un punct de minim pentru n par.

§ 2. CALCULUL DIFERENȚIAL AL FUNCȚIILOR VECTORIALE DE VARIABILĂ VECTORIALĂ

Să ne reamintim că $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în punctul $a \in A$ dacă există un număr finit notat $f'(a)$ pentru care:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

sau încă

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0$$

Observăm că $f'(a)(x - a)$ este o funcție liniară de x

Vom considera pentru început $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Dăm următoarea:

Definiția 1.2. Funcția f este diferențiabilă în punctul a , $a \in \overset{\circ}{X} \subset \mathbb{R}^n$ dacă există o funcție liniară $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încît

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Am notat $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $(a+h) = (a_1 + h_1, a_2 + h_2, \dots, a_n + h_n) \in \overset{\circ}{X}$.

Deoarece L este liniară rezultă $L(h) = D_1 h_1 + \dots + D_n h_n$, $L(h)$ se numește diferențiala funcției f în punctul a . Folosind o notație matricială putem scrie

$$L(h) = (D_1, \dots, D_n) \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = f'(a) \cdot h$$

unde cu $f'(a)$ am notat matricea $(D_1, \dots, D_n)$.

Notăm $f'(a) \cdot h = df(a)$ și o numim diferențiala funcției f în punctul a .
Avem

$$df(a) = f'(a) \cdot h = D_1 h_1 + \dots + D_n h_n.$$

Definiția 2.2. O funcție este diferențiabilă într-o mulțime deschisă dacă este diferențiabilă în orice punct din mulțime.

Observație: S-ar părea că definiția 1 depinde de alegerea bazei în $\mathbb{R}^n$. Se știe însă că o funcție liniară rămîne liniară în raport cu orice bază.

Arătăm în continuare că funcția liniară L care apare în definiția 1 este unică.

Are loc

Teorema 1.2. Dacă funcția $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este diferențiabilă în punctul $a \in X$ atunci există o singură funcție liniară L astfel încît

$$f(a+h) - f(a) = D_1 h_1 + \dots + D_n h_n + \omega(h)$$

$$\text{cu } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Demonstrație. Vom presupune existența a încă unei funcții liniare $L^* = D_1^* h_1 + D_2^* h_2 + \dots + D_n^* h_n$ care verifică de asemenea condiția din definiția derivabilității:

$$(2) \quad f(a+h) - f(a) = D_1^* h_1 + \dots + D_n^* h_n + \omega^*(h)$$

$$\text{cu } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega^*(h)|}{\|h\|} = 0$$

Punind $d(h) = f(a + h) - f(a)$ obținem

$$\begin{aligned} \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left| \sum_{i=1}^n h_i (D_i^* - D_i) \right|}{\|h\|} &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\sum h_i D_i - d(h) + d(h) - \sum h_i D_i|}{\|h\|} \leq \\ &\leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left| \sum_{i=1}^n h_i D_i^* - d(h) \right|}{\|h\|} + \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\left| \sum_{i=1}^n h_i D_i - d(h) \right|}{\|h\|} = \\ &= \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega^*(h)|}{\|h\|} + \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = 0 \end{aligned}$$

Rezultă

$$\sum_1^n D_i^* h_i = \sum_1^n D_i h_i \text{ sau } L^* = L$$

Să vedem care este semnificația constantelor D_i^* , $i = 1, 2, \dots, n$.

Fie $h = (0, 0, \dots, 0, h_i, 0 \dots 0) \in X \subset \mathbb{R}^n$ și f o funcție diferențiabilă în punctul $a \in X$. Pentru un asemenea vector h , putem scrie că

$$(4) \quad f(a_1, a_2, \dots, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) = D_i h_i + \omega(h_i)$$

$$\text{unde } \|h\| = |h_i| \text{ și } \lim_{|h_i| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h_i)|}{|h_i|} = 0$$

(1) mai poate fi scris sub forma:

$$\lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h_i} = D_i$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

și astfel D_i este derivata funcției de variabilă x_i , $f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$, în punctul a_i .

Numim D_i , *derivata parțială a funcției f în raport cu variabila x_i* . Vom folosi pentru D_i următoarele notații D_i , $f_{x_i}(a)$, $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Observație: O funcție diferențiabilă admite derivate parțiale, în timp ce nu orice funcție care admite derivate parțiale este diferențiabilă.

$$\text{Exemple: Fie } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Arătăm că f admite derivate parțiale în punctul $(0, 0)$ dar nu este diferențiabilă în acest punct.

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = 0.$$

Putem scrie

$$f(h_1, h_2) - f(0, 0) = \omega(h) \text{ de unde rezultă } \omega(h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\frac{\omega(h)}{\|h\|} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} \sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Se observă că:

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|h_1 h_2|}{h_1^2 + h_2^2} = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|h\| \cos \theta \|h\| \sin \theta}{\|h\|^2} = |\sin \theta \cos \theta| \neq 0,$$

ceea ce arată că f nu este diferențiabilă în $(0, 0)$.

În cazul în care funcția f este diferențiabilă în mulțimea deschisă X din $\mathbb{R}^n$, ea definește un *cîmp de vectori* în X astfel:

Asociem fiecărui punct „ a ” din X vectorul $(f'_{x_1}(a), f'_{x_2}(a), \dots, f'_{x_n}(a))$ pe care-l notăm cu *grad* f și-l numim gradientul funcției f (sau cîmpului scalar f).

Exemplu: Gradientul funcției scalare:

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ este grad } u = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

În cazul particular

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$f(x + h) - f(x) = x_i + h_i - x_i = h_i$$

și deci cu notația introdusă, $h_i = dx_i$, $1 \leq i \leq n$.

Rezultă că diferențiala unei funcții diferențiabile se va scrie:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

și ea aproximează diferența $f(x + h) - f(x)$ cînd $x \in \overset{\circ}{X}$ și $x + h \in \overset{\circ}{X}$.

Exemplu: Înlocuind creșterea funcției cu diferențiala ei să se aproximeze $\sqrt{1,02^3 + 1,97^3}$.

Pentru funcția $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ scriem

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) \simeq \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h_2$$

unde $x = 1$; $y = 2$; $h_1 = 0,02$; $h_2 = -0,03$

$$\begin{aligned} df(1, 2) &= \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \Big|_{(1,2)} \cdot 0,02 - \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}} \Big|_{(1,2)} \cdot 0,03 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0,02 - 2 \cdot 0,03 = -0,05 \end{aligned}$$

Avem:

$$f(1,02; 1,97) \simeq f(1,2) + df(1, 2) = 3 - 0,05 = 2,95$$

Proprietăți ale funcțiilor diferențiabile

1. Dacă $f(x) = \text{const.}$ atunci $df(x) = 0$ ceea ce rezultă din egalitatea

$$f(x + h) - f(x) = 0$$

2. Dacă $f(x)$ este o funcție liniară $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ adică $f(x) = A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_nx_n$ atunci

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= A_1(x_1 + h_1) + A_2(x_2 + h_2) + \dots + A_n(x_n + h_n) - \\ &- A_1x_1 - \dots - A_nx_n = A_1h_1 + A_2h_2 + \dots + A_nh_n + \omega(h). \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$f'(x) = (A_1, A_2, \dots, A_n) \text{ și } \omega(h) = 0.$$

3. Dacă $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$; $g: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ sînt diferențiabile în punctul $A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ atunci $d(f + g) = df + dg$.

Aceasta rezultă din șirul de egalități:

$$f(a + h) - f(a) = \sum_1^n D_i h_i + \omega(h); \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = 0$$

$$g(a + h) - g(a) = \sum_1^n D_i^* h_i + \omega^*(h); \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega^*(h)|}{\|h\|} = 0$$

și

$$(f + g)(a + h) - (f + g)(a) = \sum_1^n (D_i + D_i^*) h_i - (\omega(h) + \omega^*(h)),$$

$$\text{unde: } 0 \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h) + \omega^*(h)|}{\|h\|} \leq \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} + \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega^*(h)|}{\|h\|} = 0, \dots$$

4. Dacă $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ este diferențiabilă în $x = a$ atunci f este continuă în „ a ”. Această rezultă din relația

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{i=1}^n D_i h_i + \omega(h)$$

în care facem $\|h\| \rightarrow 0$ și ținem seama că

$$|h_i| \leq \|h\| \text{ pentru } i = 1, 2, \dots, n.$$

Derivata unei funcții vectoriale

Considerăm o funcție $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, X mulțime deschisă.

Alegînd cîte o bază în fiecare din spațiile $\mathbf{R}^n$ și $\mathbf{R}^m$ putem scrie

$$f = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)):$$

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset \mathbf{R}^n.$$

În legătură cu derivabilitatea funcțiilor vectoriale dăm următoarea:

Definiția 3.2. Funcția $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ este diferențiabilă în punctul $a \in \overset{\circ}{X}$ dacă există o transformare liniară $\lambda: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ astfel încît pentru $a + h \in X$,

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Transformarea liniară λ se numește diferențiala (diferențiala Fréchet sau derivata tare) a funcției f în punctul a .

Legătura între diferențiabilitatea unei funcții vectoriale și diferențiabilitatea funcțiilor componente este dată de:

Teorema 2.2. Funcția $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ este diferențiabilă în punctul $a \in \overset{\circ}{X}$ dacă și numai dacă fiecare din componentele ei este diferențiabilă și:

$$\lambda = (df_1(a), df_2(a), \dots, df_m(a))$$

$$\text{cu } df_i(a) = \sum_{j=1}^n D_{ij} h_j.$$

Demonstrație

Putem scrie:

$$\begin{aligned} |f_i(a + h) - f_i(a) - df_i(a)| &\leq \|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)\| \leq \\ (5) \quad &\leq \sum_{i=1}^m |f_i(a + h) - f_i(a) - df_i(a)| \text{ pentru } i = 1, \dots, n; \end{aligned}$$

Din membrii doi și trei ai inegalității (5) rezultă că dacă componentele f_i ale funcției f sînt diferențiabile atunci

$$\sum_1^m |f_i(a+h) - f_i(a) - df_i(a)| = \sum_1^m |\omega_i(h)|$$

$$\text{și } \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{|\omega_i(h)|}{\|h\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Avem

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} \leq \frac{\sum_1^m |\omega_i(h)|}{\|h\|} \rightarrow 0 \text{ cînd } \|h\| \rightarrow 0$$

ceea ce arată că f este diferențiabilă în punctul a .

Din membrul I și II al inegalității 5 rezultă că dacă f este diferențiabilă atunci f_i este diferențiabilă pentru orice i .

Observăm că transformarea liniară $\lambda(h)$ care apare în definiția 3.2 este definită de matricea

$$(6) \quad f'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

pe care o numim matricea Jacobi a aplicației $f(x)$ în punctul a .

Determinantul asociat matricei în cazul $m = n$ se numește determinantul jacobian al aplicației $f(x)$ sau determinantul funcțional și se notează

$$\left| \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| \text{ sau } \left| \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|.$$

Exemple: Fie $\bar{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)e_1 + F_2(x, y, z)e_2 + F_3(x, y, z)e_3$ unde $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$

Numim *divergența funcției* $\bar{F}$, funcția scalară

$$(7) \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \text{div. } \bar{F}$$

Numim *rotorul funcției* (cîmpului) $\bar{F}$ funcția vectorială (cîmpul vectorial)

$$(8) \quad \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) e_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) e_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) e_3 = \text{rot } \bar{F}$$

Derivate de funcții compuse

Fie $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^m$ și $g: Y \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^p$

Teorema: 3.2. Dacă funcția f este derivabilă în $x = a \in X$ și funcția g este derivabilă în $y = b = f(a) \in Y$ atunci funcția compusă $h = g \circ f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^p$ este derivabilă în $x = a$ și $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstrație

$$\text{Notăm: } \omega_1(x, a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$$

$$\omega_2(y, b) = g(y) - g(b) - g'(b)(y - b)$$

$$\text{unde } \frac{\|\omega_1(x, a)\|}{\|x - a\|} \rightarrow 0 \text{ când } \|x - a\| \rightarrow 0 \text{ și}$$

$$\frac{\|\omega_2(y, b)\|}{\|y - b\|} \rightarrow 0 \text{ când } \|y - b\| \rightarrow 0$$

Eliminând $y = f(x)$ și $b = f(a)$ între cele două relații avem:

$$g(f(x)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \omega_2(f(x), f(a))$$

sau

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) &= g'(f(a)) [f'(a)(x - a) + \omega_1(x, a)] + \omega_2(f(x), f(a)) = \\ &= g'(f(a)) f'(a)(x - a) + g'(f(a)) \omega_1(x, a) + \omega_2(f(x), f(a)) \end{aligned}$$

Arătăm că

$$\begin{aligned} &\lim_{\|x-a\| \rightarrow 0} \frac{\|g'(f(a)) \omega_1(x, a) + \omega_2(f(x), f(a))\|}{\|x - a\|} \leq \\ &\leq \lim_{\|x-a\| \rightarrow 0} \frac{\|g'(f(a)) \omega_1(x, a)\| + \|\omega_2(f(x), f(a))\|}{\|x - a\|} \leq \\ &\leq \lim_{\|x-a\| \rightarrow 0} \frac{M \|\omega_1(x, a)\| + \|\omega_2(f(x), f(a))\|}{\|x - a\|} = 0 \end{aligned}$$

Existența lui M este asigurată de faptul că $g'(f(a))$ este liniară. Matricele Jacobi asociate derivatelor $h'(a)$, $g'(f(a))$, $f'(a)$ sînt:

$$h'(a) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_p}{\partial x_1} & \frac{\partial h_p}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

$$f'(a) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{array} \right\|$$

$$g'(b) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \frac{\partial g_p}{\partial y_2} & \dots \frac{\partial g_p}{\partial y_m} \end{array} \right\|$$

Din egalitatea $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ rezultă regula după care se calculează derivatele parțiale ale funcției compuse.

Exemplu 1. Fie $h(x) = g(u(x), v(x))$, $x \in X \subset \mathbf{R}$. În acest caz $h(x) = g \circ f(x)$ unde $f(x) = (u(x), v(x))$. Notăm $y_1 = u(x)$, $y_2 = v(x)$.

Matricele Jacobi asociate sînt:

$$h'(x) = \|h'(x)\|, g'(x) = \left\| \frac{\partial g}{\partial y_1}, \frac{\partial g}{\partial y_2} \right\|$$

$$f'(x) = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\|.$$

Din înmulțirea acestora rezultă

$$\|h'(x)\| = \left\| \frac{\partial g}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_2} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\|$$

sau

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

Exemplul 2. Fie $h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y))$ unde h , f_1 , f_2 sînt funcții derivabile în $X \subset \mathbf{R}^2$ iar g este derivabilă în $\mathbf{R}^2$.

Notăm $f_1(x, y) = u_1$, $f_2(x, y) = u_2$.

În acest caz $h = g \circ f$ unde $f = (f_1, f_2)$.

Matricele Jacobi asociate acestor funcții sînt:

$$h'(x, y) = \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial h}{\partial y} \right\|; \quad g'(u_1, u_2) = \left\| \frac{\partial g}{\partial u_1} \quad \frac{\partial g}{\partial u_2} \right\|$$

$$f'(x, y) = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right\|$$

Din înmulțirea lor rezultă

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{aligned}$$

Exemplul 2. Să se calculeze $\operatorname{div} \bar{F}(x, y, z)$ dacă

$$\bar{F}(x, y, z) = \bar{r} f(r), \quad \bar{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}.$$

$$\text{Știm că } \operatorname{div} \bar{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}, \quad \bar{F} = (F_1, F_2, F_3)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x f(r)) = f(r) + x \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{df}{dr}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y f(r)) = f(r) + y \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f(r) + \frac{y^2}{r} \cdot \frac{df}{dr}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} (z f(r)) = f(r) + z \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = f(r) + \frac{z^2}{r} \cdot \frac{df}{dr}$$

$$\operatorname{div} \bar{F} = 3f(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{df}{dr} = 3f(r) + r \frac{df}{dr}.$$

Derivate parțiale de ordin superior

Fie $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Presupunem că f admite derivate parțiale de ordinul I în raport cu toate argumentele în X .

$$\text{Să notăm } f_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Definiția 4.2. Dacă funcția $f_i(x_1, \dots, x_n)$ admite derivate parțiale în raport cu x_j , $1 \leq j \leq n$ într-un punct $a = (a_1, \dots, a_n) \in \overset{\circ}{X} \subset \mathbf{R}^n$ spunem că f admite derivată parțială de ordinul 2 în raport cu x_i și x_j și notăm

$$f''_{x_i x_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{x_j \rightarrow a_j} \frac{f_1(a_1, \dots, x_j, \dots, a_n) - f_1(a_1 \dots a_n)}{x_j - a_j}.$$

În mod asemănător se definesc derivate parțiale de ordin mai mare decît 2.

În legătură cu egalitatea derivatelor $f''_{x_i x_j}$ și $f''_{x_j x_i}$ are loc următorul criteriu:

Teorema 4.2. (A. Schwarz). Dacă $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ are derivate parțiale mixte de ordinul 2 într-o vecinătate V a punctului $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overset{\circ}{X}$ și dacă $f''_{x_i x_j}$ este continuă atunci

$$f''_{x_i x_j} = f''_{x_j x_i}.$$

Demonstrație: Pentru ușurința scrierii vom considera o funcție de 2 variabile $f(x, y)$ și expresia

$$E = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y)$$

Fie $\varphi(x) = f(x, y+k) - f(x, y)$ unde presupunem y constant.

Obținem $E = \varphi(x+h) - \varphi(x)$.

Funcția $\varphi(x)$ este continuă și derivabilă, deci:

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y+k) - f'_x(x, y).$$

Dacă aplicăm teorema creșterilor finite lui E putem scrie:

$$E = h \varphi'_x(\xi), \quad x < \xi < x+h$$

sau încă

$$E = h(f'_x(\xi, y+k) - f'_x(\xi, y)) = h k f''_{xy}(\xi, \eta),$$

$$\xi \in (x, x+h), \quad \eta \in (y, y+k).$$

Revenind la funcția φ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{h} = f'_y(x, y)$$

deci,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)$$

și, ținînd seama de continuitatea lui f''_{xy} obținem:

$$\frac{E}{h} = k f''_{xy}(\xi, \eta) \quad \text{și} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E}{h} = h f''_{xy}(\xi, y).$$

Rezultă:

$$h f''_{xy}(\xi, y) = f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)$$

și împărțind cu h :

$$f''_{xy}(\xi, y) = \frac{f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)}{h}.$$

Când $h \rightarrow 0$ obținem:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

În mod asemănător se definesc și derivatele parțiale de ordin mai mare decît 2.

Exemplul 1. Să se determine derivata $\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n}$ pentru funcția $f(x, y) = x \cdot e^{2x+3y}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Derivînd în raport cu y de n ori obținem

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = x \cdot 3^n \cdot e^{2x+3y}.$$

Pentru a deriva această funcție de m ori în raport cu x aplicăm regula lui Leibniz și avem:

$$\frac{\partial^{m+n}f}{\partial x^m \partial y^n} = 3^n [2^m \cdot e^{2x+3y} \cdot x + C_m^1 \cdot 2^{m-1} \cdot e^{2x+3y}] = 3^n \cdot 2^{m-1} e^{2x+3y} (2x + m).$$

2. Fie $f(x) = F(u(x), v(x))$. Să se calculeze $f''(x)$.

$$f'_{(x)} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot v'$$

$$f''_{(x)} = \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \frac{\partial F}{\partial v} v'' + u' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} v' \right) + v' \left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v' \right)$$

și

$$f''_{(x)} = \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \frac{\partial F}{\partial v} v'' + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u'^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} u'v' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v'^2$$

3. Fie $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$. Să se calculeze $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \\ &+ \frac{\partial u}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{\partial v}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right]. \end{aligned}$$

Diferențele de ordin superior

Definiția 5.2. Fie $f(x, y) : X \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ derivabilă parțial de 2 ori pe X cu toate derivatele parțiale de ordinul 2 continue.

Diferențiala de ordinul 2 se definește astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 = d^2 f.$$

Observație $d^2 f = d(df)$ dacă ținem seama că $d(dx) = d(dy) = 0$.

Dacă introducem operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy$$

diferențiala df se poate scrie:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f, \quad d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(2)} f.$$

și în general: $d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f$.

În mod asemănător dacă considerăm $f(x_1, \dots, x_n) : X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ și presupunem că f are în X toate derivatele parțiale de ordinul „ n ” continue definim diferențiala de ordinul p ca fiind:

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^{(p)} f.$$

Exemple. 1) Să se calculeze diferențiala de ordinul „ n ” pentru funcția $f(x, y) = \sin(ax + by)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{aligned} d^n f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^{(n)} f = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} \sin\left(ax + by + \frac{n\pi}{2}\right) dx^k dy^{n-k} = \\ &= \sin\left(ax + by + \frac{n\pi}{2}\right) \cdot (a dx + b dy)^n. \end{aligned}$$

2) Să se calculeze $d^2 f$ dacă

$$f(x) = F(u(x), v(x)). \quad x \in X \subset \mathbf{R}$$

Obținem:

$$d^2 f = f''(x) dx^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} du^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} dv du.$$

Vom spune că diferențiala de ordinul 2 a funcției f astfel definită nu este invariantă la compunerea funcțiilor.

Derivata după o direcție

Fie Γ o curbă într-un domeniu $X \subset \mathbf{R}^3$.

$$\Gamma = \{x \in X, x = x(t), \alpha \leq t \leq \beta\}; x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)).$$

Presupunem că $x'(t)$ este continuă pentru $\alpha \leq t \leq \beta$.

Vectorul $x'(t)$ este tangent la curba Γ în punctul $x(t)$.

Să considerăm o funcție $y = y(x), y: X \rightarrow Y \subset \mathbf{R}$ derivabilă într-o mulțime ce conține punctele curbei Γ .

Fie $\varphi(t) = y(x(t)), t \in [\alpha, \beta] \rightarrow Y$

Derivata acestei funcții este

$$\varphi'(t) = y'(x) \cdot x'(t), t \in [\alpha, \beta]$$

și se numește derivata funcției $y(x)$ în direcția curbei Γ (sau a vectorului T tangent la curba Γ).

Când Γ este un segment se poate scrie

$$x = c + te, 0 \leq t \leq 1, x_i = c_i + te_i \quad i = 1, 2, 3$$

și

$$\varphi'(t) = e_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial y}{\partial x_3}.$$

Să reluăm definiția dată mai sus pentru cazul particular al unei funcții $z = f(x_1, x_2, x_3)$.

$$\begin{aligned} &\text{Vom numi derivata funcției } f \text{ după direcția unei drepte } T: \frac{x_1 - a}{\alpha} = \\ &= \frac{x_2 - b}{\beta} = \frac{x_3 - c}{\gamma} \text{ ca fiind} \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in T}} \frac{f(M) - f(M_0)}{|MM_0|} = \frac{df}{dT}, \quad M(x_1, x_2, x_3), M_0(a, b, c).$$

Din ecuația dreptei T rezultă reprezentarea sa parametrică $x_1 = a + \alpha\rho$, $x_2 = b + \beta\rho$, $x_3 = c + \gamma\rho$.

Calculăm această limită.

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{M \rightarrow M_0 \\ M \in T}} \frac{f(M) - f(M_0)}{|MM_0|} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(a, b, c)}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2}} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(a + \rho\alpha, b + \rho\beta, c + \rho\gamma) - f(a, b, c)}{\rho} = \\ &= \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)_{(a, b, c)}. \end{aligned}$$

Exemplu: Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ după direcția $D(1, 1, 1)$ în punctul $A(1, 1, 1)$.

În baza celor arătate

$$\frac{df}{dD} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right)_A = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Fie $f(x_1, \dots, x_n) : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabilă de „ $n + 1$ ” ori în raport cu toate argumentele cu derivatele mixte în X și $a = (a_1, \dots, a_n)$ un punct interior lui X .

Considerăm funcția

$$F(t) = f(a_1 + (x_1 - a_1)t, a_2 + (x_2 - a_2)t, \dots, a_n + (x_n - a_n)t)$$

cu $t \in [0, 1]$, $F(0) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $F(1) = f(x_1, \dots, x_n)$.

Aplicăm funcției $F(t)$ formula lui Mac-Laurin.

Avem:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} \cdot F'(0) + \dots + \frac{1}{m!} F^{(m)}(0) + R_m$$

$$\text{cu } R_m = \frac{1}{(m+1)!} \cdot F^{(m+1)}(\theta), \quad 0 < \theta < 1.$$

$$\text{Dar: } F(1) = f(x_1, \dots, x_n), \quad F(0) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$F(t) \equiv f(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad x_i(t) = a_i + (x_i - a_i)t$$

și

$$d^m F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m f.$$

Dar: $dx_i = (x_i - a_i) dt$ și pentru $t = 0$.

$$\left. \frac{d^m F}{dt^m} \right|_{t=0} \equiv \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(m)} f(a).$$

Cu aceasta formula lui Taylor pentru funcția $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ se scrie

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(a_1, a_2, \dots, a_n) + \\ &+ \frac{1}{1!} \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(a) + \dots + \\ &+ \frac{1}{m!} \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(m)} f(a) + R_m \end{aligned}$$

$$\text{cu } R_m = \frac{1}{(m+1)!} \left((x_1 - a_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + (x_n - a_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{(m+1)} \cdot f(a + \theta(x - a)),$$

$$0 < \theta < 1$$

Se poate arăta că

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_m}{\|x - a\|^m} = 0.$$

Observație. Dacă în formula lui Taylor facem $m = 0$ obținem:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = (x_1 - a_1) f'_{x_1}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + \\ + (x_2 - a_2) f'_{x_2}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) + \dots + (x_n - a_n) f'_{x_n}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \\ \xi_1 \in (a_1, x_1), \dots, \xi_n \in (a_n, x_n),$$

căre este *formula creșterilor finite* pentru o funcție de mai multe variabile.

Extreme pentru funcții $F : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Definiția 6.2. Punctul $a \in \bar{X}$ este punct de minim local (maxim local) pentru funcția f dacă $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) într-o vecinătate a punctului a .

Un punct de maxim sau minim local „ x ” se numește punct de extrem local.

Acesta este punct de extrem local în raport cu toate direcțiile care trec prin el. Dacă funcția f este derivabilă rezultă că derivata ei în raport cu toate direcțiile este nulă și deci alegând direcțiile: $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ obținem:

$$\frac{df}{de_1} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{df}{de_2} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{df}{de_n} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Definiția 7.2. Punctele care anulează sistemul $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ se numesc puncte staționare ale funcției f .

Care dintre aceste puncte staționare sînt puncte de extrem și ce fel de puncte?

Pentru a răspunde la această problemă folosim formula lui Taylor.

Fie $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ un punct staționar al funcției $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Fiind punct staționar $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Formula lui Taylor dă:

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (x_i - a_i) (x_j - a_j) + R_2(x).$$

Semnul diferenței $f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n)$ este dat de forma pătratică

$$d^2\Phi(a) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \dots dx_j \text{ unde am notat } x_i - a_i = dx_i$$

Dacă forma pătratică $d^2\Phi(a)$ este pozitivă atunci $f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \geq 0$ într-o vecinătate a punctului $a = (a_1, \dots, a_n)$ și punctul a este punct de minim.

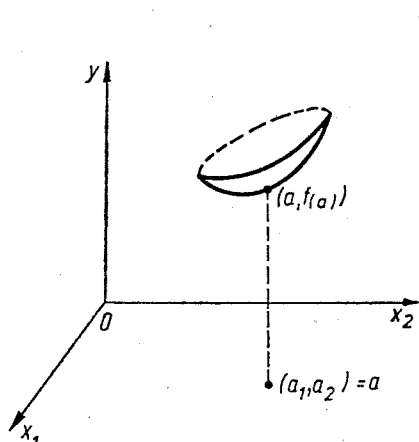


Fig. 8

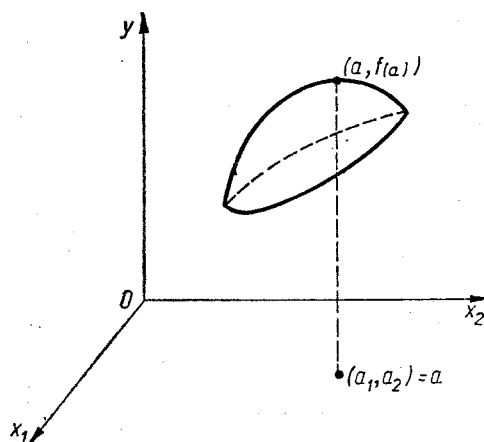


Fig. 9

Dacă forma pătratică $d^2\Phi(a)$ este negativă atunci $f(x_1, \dots, x_n) - f(a_1, \dots, a_n) \leq 0$ într-o vecinătate a punctului a și punctul a este punct de maxim. Cele 2 situații se prezintă în fig. 8 și fig. 9 pentru $n = 2$.

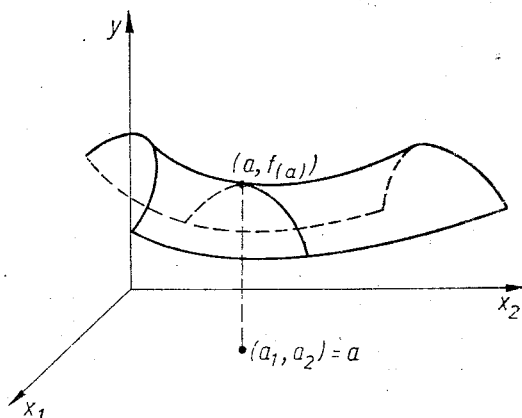


Fig. 10

Se poate întâmpla ca forma pătratică $d^2\Phi(a)$ să fie pozitivă pentru anumite valori a lui x și negativă pentru altele. Spunem atunci că punctul „ a ” nu este punct de extrem este punct șa (fig. 10).

Dacă $d^2\Phi = 0$ se apelează la termeni de ordin superior în formula lui Taylor.

Pentru a stabili în ce caz $d^2\Phi$ este pozitiv definită sau negativ definită aplicăm teorema lui Sylvester referitor la forma pătratică (rezultat pe care-l presupunem cunoscut din algebră) și anume dacă determinanții:

$$\delta_1 = \left| \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} \right|, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\delta_n = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

sînt toți pozitivi atunci $d^2\Phi > 0$, iar dacă $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0$, ... $\delta_n(-1)^n > 0$ atunci $d^2\Phi < 0$.

Dacă determinanții δ_i sînt nenuli dar semnele lor variază după o altă regulă atunci punctul a este de tip șa .

Dacă cel puțin unul din determinanții δ_i se anulează se apelează la derivate de ordin superior din formula Taylor.

Exemplu: Condiția suficientă de extrem pentru o funcție $y = f(x_1, x_2)$ este $f''_{x_1 x_1}(a) \cdot f''_{x_2 x_2}(a) - f''_{x_1 x_2}(a)^2 > 0$.

Pentru $f''_{x_1 x_1}(a) > 0$ punctul „ a ” este punct de minim.

Pentru $f''_{x_1 x_1}(a) < 0$ punctul „ a ” este punct de maxim.

Într-adevăr dacă „ a ” este un punct staționar atunci

$$\delta_1 = f''_{x_1 x_1}, \quad \delta_2 = f''_{x_1 x_1} f''_{x_2 x_2} - f''_{x_1 x_2}^2$$

și aplicăm rezultatul enunțat și rezultatul din formula lui Sylvester.

Cunoscînd modul în care se determină extremele unei funcții de mai multe variabile putem rezolva următoarea problemă de *ajustare a datelor*.

Să presupunem că în studiul unui fenomen se fac măsurători asupra a două caracteristici (presiune, temperatură) pentru care nu se cunoaște dependența teoretică între ele.

Așezăm aceste date în tabelul:

p_i	p_1	p_2		p_n
t_i	t_1	t_2		t_n

Ne interesează să stabilim forma dependenței

$$p = f(t)$$

După ce se aşază punctele de coordonate (t_i, p_i) , $i = 1, \dots, n$ într-un sistem ortogonal de axe se face o apreciere asupra formei funcţiei f (liniară, exponenţială, logaritmică, polinom).

Să presupunem că repartiţia punctelor se realizează aproximativ după parabola

$$p = at^2 + bt + c$$

ai cărei coeficienţi a , b , c sînt nedeterminaţi.

Vom determina aceşti coeficienţi astfel încît

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n (p(t_i) - p_i)^2$$

să fie minimă.

În acest caz funcţia al cărui minim trebuie să-l determinăm este

$$\varepsilon(a, b, c) = \sum_{i=1}^n (at_i^2 + bt_i + c - p_i)^2$$

a , b , c se determină din sistemul

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n t_i^2 (at_i^2 + bt_i + c - p_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n t_i (at_i^2 + bt_i + c - p_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (at_i^2 + bt_i + c - p_i) = 0. \end{cases}$$

Această metodă de ajustare se numeşte *metoda celor mai mici pătrate* denumire justificată de forma lui ε (ε = eroare).

§ 3 FUNCŢII IMPLICITE

În aplicaţii se întîlnesc în mod curent situaţii în care variabila u funcţie de argumentele $x, y, \dots$ este dată de ecuaţia funcţională.

$$F(u, x, y, \dots) = 0. \quad (9)$$

În acest caz spunem că u este o funcţie definită implicit de ecuaţia (9).

Exemplul 1. Ecuaţia $y^2 = x^2$ defineşte funcţiile

$$y(x) = \begin{cases} x, & x \in [\alpha, \beta] \\ -x, & x \in \mathbf{R} - [\alpha, \beta] \end{cases}$$

pe $\mathbf{R}$, pentru orice α şi β reali (Fig. 11).

Oricare din aceste funcții reprezintă o soluție a ecuației funcționale $y^2 = x^2$.

Exemplul 2. Ecuația $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = z^2$ definește în $\mathbf{R}^n$ funcțiile:

$$z(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, & (x_1, \dots, x_n) \in D \\ -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, & (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n - D \end{cases}$$

oricare ar fi compactul D în $\mathbf{R}^n$.

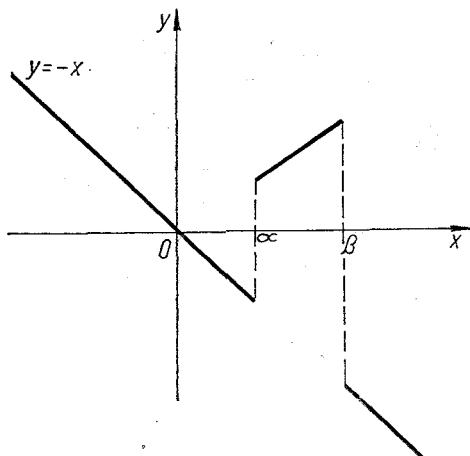


Fig. 11

Oricare din aceste funcții reprezintă o soluție a ecuației funcționale. Problema care se pune este în ce condiții o asemenea ecuație funcțională definește o singură funcție continuă și derivabilă.

În legătură cu aceasta are loc.

Teorema 1.3. Fie funcția $F : X \subset \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$, $(u, x) \in X$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1) diferențiabilă într-o vecinătate V a punctului $M_0(u_0, x_0)$,

2) cu derivata $\frac{\partial F}{\partial u}$ continuă în M_0 și $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{M_0} \neq 0$

3) cu $F(u_0, x_0) = 0$

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V' a punctului $M'_0(x_0)$ $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ în care să fie definită o singură funcție $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ care îndeplinește condiția $|u - u_0| < \varepsilon$ și este soluție a ecuației

$$F(u, x) = 0$$

Funcția $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ astfel determinată este continuă și diferențiabilă în V' .

Demonstrație. Vom demonstra teorema în cazul $x = (x_1, x_2)$. Ecuația $F(u, x_1, x_2) = 0$ definește în spațiul $\mathbf{R}^3$ o suprafață S și deoarece $F(u_0, x_{10}, x_{20}) = 0$ punctul M_0 este situat pe suprafața S .

Deoarece $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{M_0} \neq 0$ vom presupune că $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{M_0} > 0$. Această vecinătate o alegem drept o sferă Ω cu raza suficient de mică cu centrul în M_0 .

Fixăm mai departe numărul pozitiv ε suficient de mic ca fiecare din punctele $M_1(u_0 - \varepsilon, x_{10}, x_{20})$ și $M_2(u_0 + \varepsilon, x_{10}, x_{20})$ să fie situate în sfera Ω .

Funcția $F(u, x_{10}, x_{20})$ ca funcție numai de variabila u pe segmentul $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0 + \varepsilon$ (pe figură segmentul $M_1 M_2$) este o funcție crescătoare (deoarece

$\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u, x_{10}, x_{20})}$ este pozitivă).

Dar $F(u_0, x_{10}, x_{20}) = 0$, deci $F(M_1) < 0$ și $F(M_2) > 0$.

Dacă avem în vedere funcțiile $F(u_0 - \varepsilon, x_1, x_2)$ și $F(u_0 + \varepsilon, x_1, x_2)$ ca funcții de (x_1, x_2) studiate în planele $u = u_0 - \varepsilon$, $u = u_0 + \varepsilon$

observăm că există 2 vecinătăți V'_1 și V'_2 respectiv ale punctelor M_1 și M_2 în care F are același semn ca în punctele M_1 și M_2 (ne bazăm pe faptul că o funcție continuă pozitivă într-un punct păstrează semnul într-o vecinătate a punctului). Să alegem vecinătățile V'_1 și V'_2 ca fiind 2 pătrate cu centrele în punctele M_1 respectiv M_2 și cu latura 2δ situate în sfera Ω ; putem scrie

$$F(u_0 - \varepsilon, x_1, x_2) < 0$$

$$F(u_0 + \varepsilon, x_1, x_2) > 0$$

pentru $|x_1 - x_{10}| < \delta, |x_2 - x_{20}| < \delta$. Pentru fiecare δ astfel ales orice punct a spațiului (u, x_1, x_2) a căror coordonate verifică inegalitățile:

$$|x_1 - x_{10}| < \delta, |x_2 - x_{20}| < \delta, |u - u_0| < \varepsilon$$

va fi situat în sfera Ω .

În acest paralelipiped cu centrul în M_0 derivata $\frac{\partial F}{\partial u} > 0, F(u_0 - \varepsilon, x_1, x_2) < 0$

și $F(u_0 + \varepsilon, x_1, x_2) > 0$.

Fie $M'(x_1, x_2)$ un punct din mulțimea $|x_1 - x_{10}| < \delta, |x_2 - x_{20}| < \delta$ și M'_1 și M'_2 puncte de intersecție ale dreptei ce trece prin M paralelă cu axa Ou cu bazele paralelipipedului.

Cum $\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_{(u, x_1, x_2)} > 0$ pentru $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0 + \varepsilon$ atunci $F(u, x_1, x_2)$ crește

pe acest segment și din condiția $F(M'_1) < 0, F(M'_2) > 0$ rezultă că în segmentul $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0 + \varepsilon$ se găsește un singur u astfel ca $F(u, x_1, x_2) = 0$.

Notăm cu $u = \varphi(x_1, x_2)$ regula care asociază fiecărui punct $M'(x_1, x_2)$ din $|x_1 - x_{10}| < \delta, |x_2 - x_{20}| < \delta$ un singur număr u din intervalul $u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon$ pentru care $F(u, x_1, x_2) = 0$.

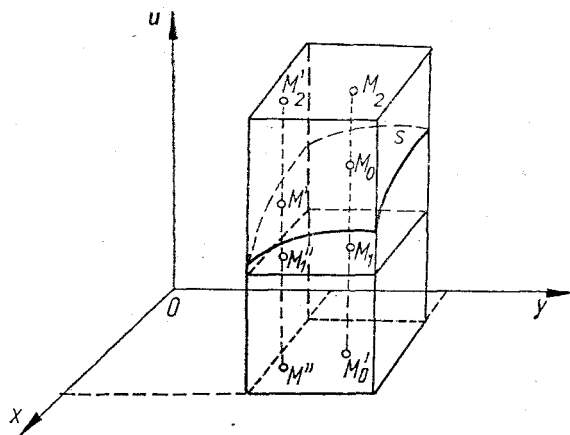


Fig. 12

și urmărim în ce condiții funcțiile

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n); \quad u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n)$$

sînt definite implicit de sistemul (10).

Fie determinantul

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

pe care îl numim determinantul lui Iacobi sau iacobian.

Are loc

Teorema 2.3. Fie funcțiile $F_i(u, x)$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $i = 1, 2, \dots, m$ diferențiabile într-o vecinătate a punctului $M_0(u_0, x_0)$ unde $u_0 = (u_{10}, \dots, u_{m0})$, $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ cu derivatele parțiale de ordinul I, $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, m$ continuă în M_0).

Dacă $F_i(u_0, x_0) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ și $\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_m)}{D(u_1, u_2, \dots, u_m)} \Big|_{M_0} \neq 0$ atunci pentru $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m$ suficient de mici există o vecinătate a punctului $M'_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$ și m funcții: $u_1, u_2, \dots, u_m$ definite în această vecinătate care verifică condițiile: $|u_1 - u_{10}| < \varepsilon_1$, $|u_2 - u_{20}| < \varepsilon_2, \dots, |u_m - u_{m0}| < \varepsilon_m$ și sînt soluții ale sistemului de ecuații funcționale.

Această soluție este continuă și diferențiabilă în această vecinătate a punctului M'_0 .

Nu vom da demonstrația acestei teoreme care se bazează pe cea dinainte.

Exemple. 1) Sistemul de ecuații funcționale

$$\begin{cases} x^2 + xz + xyz = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

definește $z = z(x)$ și $y = y(x)$ dacă

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} zx & x + yx \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x(z^2 - y - y^2) \neq 0.$$

2) În ce puncte din spațiu ecuația $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 xz$ definește $z = z(x, y)$? În aceste puncte să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Vom nota $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - ax^2 z$. Condițiile din teorema de existență aplicate funcției F conduc la $\frac{\partial F}{\partial z} = 4z(x^2 + y^2 + z^2) - ax^2 \neq 0$.

Deci, explicitatea are loc peste tot în $\mathbf{R}^2$ mai puțin punctele pentru care

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ax^2}{4z}.$$

Înlocuind aceste condiții în ecuația inițială obținem $z = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{ax^2}{2}}$ pentru care condiția $F'_z \neq 0$ se reduce la

$$x^2 + y^2 - \frac{3x}{8} \sqrt[3]{2a^2 x} \neq 0.$$

În punctele din $\mathbf{R}^2$ în care este îndeplinită această condiție, $z = z(x, y)$ și are loc identitatea:

$$(x^2 + y^2 + z^2(x, y))^2 = ax^2 z(x, y).$$

Derivând parțial în raport cu x și y obținem:

$$4(x^2 + y^2 + z^2) \left(x + z \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2axz + ax^2 \frac{\partial z}{\partial x}$$

de unde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2x(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - az)}{4(x^2 + y^2 + z^2) - ax^2}.$$

§ 4 DEPENDENȚA FUNCȚIONALĂ

Fie sistemul de funcții

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$$

$u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$, $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, D mulțimea deschisă.

Definiția 1.4. $u_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$ depinde de celelalte funcții în D dacă pentru toate punctele $(x_1, \dots, x_n)$ ale domeniului D .

$$u_k = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$$

Dacă nu există o funcție Φ cu această proprietate spunem că $u_1, u_2, \dots, u_m$ sînt independente în D .

Astfel funcțiile:

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$u_3 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

sînt dependente funcțional în $\mathbf{R}^3$. Legătura între ele este dată de:

$$u_2^2 = u_1 + 2u_3.$$

Teorema 1.4. Fie m funcții de n variabile $n \geq m$.

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$u_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)$$

$\varphi_i : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definite și diferențiabile în vecinătatea punctului $M_0(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$.

Dacă

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_m)} \Big|_{M_0} \neq 0$$

atunci funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sînt independente într-o vecinătate a punctului M_0 .

Demonstrație. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $u_1, u_2, \dots, u_m$ sînt dependente într-o vecinătate V a punctului M_0 adică una din aceste funcții

$$u_k = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m) \quad (11)$$

pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in V$.

Derivînd parțial obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k-1}} \cdot \frac{\partial u_{k-1}}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial u_{k+1}} \cdot \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_m} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (12)$$

relație adevărată pentru orice $(x_1, \dots, x_n) \in V$.

Aceasta arată că coloana k a determinantului funcțional este o combinație a celorlalte coloane și deci $\frac{D(u_1, \dots, u_m)}{D(x_1, \dots, x_m)} = 0$ în V , ceea ce contrazice ipoteza făcută.

Vom determina acum o condiție ca m funcții să fie funcțional dependente.

Presupunem că $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ sînt definite și derivabile într-o vecinătate V oarecare a punctului $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$ unde toate derivatele parțiale de ordinul I sînt continue în punctul M_0 .

Formăm matricea:

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (13)$$

Are loc

Teorema 2.4. Să presupunem că un minor de ordinul r din această matrice este diferit de zero în punctul $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$ și că toți minorii de ordinul „ $r + 1$ ” sînt nuli într-o vecinătate a punctului M_0 .

În aceste condiții r funcții ce apar în minorul de ordinul r sînt independente într-o vecinătate a punctului M_0 ; celelalte $n - r$ funcții depind de aceste r funcții.

Demonstrație. Să presupunem că

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0.$$

Din teorema demonstrată anterior rezultă că $u_1, u_2, \dots, u_r$ sînt independente într-o vecinătate a punctului M_0 .

Vom arăta că fiecare din funcțiile rămase $u_{r+1}, u_{r+2}, \dots, u_m$ depind de $u_1, \dots, u_r$, într-o vecinătate a punctului M_0 .

Notăm $u_{i0} = \varphi_i(x_{10}, \dots, x_{n0})$; $i = 1, 2, \dots, r$
Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) - u_1 = 0 \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) - u_2 = 0 \\ \dots \\ \varphi_r(x_1, \dots, x_n) - u_r = 0 \end{cases} \quad (14)$$

În punctul de coordonate $(x_{10}, \dots, x_{n0}, u_{10}, \dots, u_{r0})$ aplicăm teorema de existență de la sisteme de funcții implicite.

Deoarece:

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r)}{D(x_1, x_2, \dots, x_r)} \Big|_{M_0} \neq 0$$

rezultă

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \\ x_2 = \psi_2(x_{r+1}, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \\ \dots \\ x_r = \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r) \end{cases} \quad (15)$$

Obținem:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_l} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} \cdot \frac{\partial \psi_r}{\partial x_l} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \quad (18)$$

$$i = r + 1, r + 2, \dots, n.$$

Considerăm minorul de ordinul „ $r + 1$ ”

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} \end{vmatrix} \quad (19)$$

care este nul din ipoteză.

Înmulțind în (18) respectiv cu $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r, \Delta_i$ fiind complementarii algebrici ai elementelor ultimei linii din determinantul (19) și apoi adunând aceste relații obținem:

$$\Delta = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l} \Delta_i$$

de unde rezultă că $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_l}$ este nulă într-o vecinătate a punctului M_0 .

Acestea arată că funcțiile Φ_i nu depind de x_l , $l = r + 1, \dots, n$.

Consecință. În cazul particular în care sistemul de funcții este:

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$u_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$u_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

cu $(x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$ și $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$, condiția necesară și suficientă ca cele n funcții să fie în dependență funcțională în D este ca

$$\left. \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|_D = 0$$

Acesta rezultă din teoremele 1.4 și 2.4 în cazul $n = m$.

§ 5. EXTREME CONDIȚIONATE

În aplicații apar adeseori situații în care se caută extremele unei funcții ale cărei argumente verifică anumite condiții suplimentare. Extremele funcției în acest caz se numesc extreme legate sau condiționate.

Să punem problema determinării extremelor funcției $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ supuse condițiilor:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0; \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

Definiția 1.5. Funcția $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ supusă la legăturile (20) are un maxim (minim) legat în punctul $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0}, y_{10}, \dots, y_{m0})$ care verifică relațiile (20) dacă există o vecinătate V a punctului M_0 astfel că:

$$f(M) \leq f(M_0) \quad (f(M) \geq f(M_0))$$

pentru orice $M \in V$ cu $F_i(M) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$.

Presupunem că: 1) funcțiile F_i sînt diferențiabile într-o vecinătate U a punctului M_0 .

$$2) \frac{\partial F_i}{\partial y_j}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m$$

sînt continue în U

$$3) \left. \frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)} \right|_{M_0} \neq 0$$

În aceste condiții aplicăm teorema de existență de la sisteme de funcții implicite în baza căreia există o vecinătate V a punctului $M_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$ a spațiului $(x_1, \dots, x_n)$ astfel ca în această vecinătate să fie definite m funcții:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ y_m = \varphi_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (21)$$

soluții ale sistemului de condiții $F_i = 0, \quad i = 1, \dots, m$.

Înlocuind sistemul de funcții (21) în funcția $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ obținem:

$$u = f[x_1, \dots, x_n, \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_n)] = \Phi(x_1, \dots, x_n). \quad (22)$$

Pentru funcția Φ astfel obținută studiem extremele libere.

Vom stabili în continuare condițiile necesare de extreme pentru funcția $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ supusă legăturilor (20) fără să rezolvăm sistemul (20) de ecuații funcționale.

Să presupunem că M_0 este un punct de extrem pentru funcția $u = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ supusă la legăturile (20) sau M'_0 este un punct de extrem liber pentru funcția $u = \Phi(x_1, \dots, x_n)$.

Condiția necesară de extrem liber a unei funcții de mai multe variabile este:

$$du = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (23)$$

identic în raport cu $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$.

Alegem $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ astfel încât să fie îndeplinite egalitățile:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = 0 \quad (29)$$

Aceasta o putem face deoarece (29) este echivalent cu sistemul

[illegible]

a cărui determinant este diferit de zero.

Din egalitățile (29), egalitatea (28) capătă forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad (31)$$

Deoarece variabilele $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt independente, din (31) rezultă

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0. \quad (32)$$

(32) împreună cu (29) și cu condițiile de legătură (20) conduc la un sistem de $n + 2m$ ecuații:

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0, \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = 0 \\ F_1 = 0, \dots, F_m = 0 \end{cases} \quad (33)$$

sistem care determină coordonatele punctului staționar și constantele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

14. Această metodă reduce calculul punctelor staționare legate la calculul punctelor staționare libere pentru funcția lui Lagrange Φ .

Conditii suficiente de extrem legat

Presupunem că M_0 este un punct staționar legat adică un punct în care sînt îndeplinite condițiile necesare de extrem legat. Vom presupune în plus că funcțiile f și $F_i, i = 1, 2, \dots, m$ admit derivate parțiale de ord. 2 continue în punctul M_0 . Observăm că

$$f(M) - f(M_0) = \Phi(M) - \Phi(M_0)$$

deoarece $F_i(M_0) = 0$; și $F_i(M) = 0$, $i = 1, \dots, m$ și de aici rezultă că determinarea condițiilor suficiente de extrem legat pentru funcția f cu legăturile $F_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ se reduce la determinarea condițiilor suficiente de extrem pentru funcția Φ ceea ce revine la studiul lui $d^2\Phi|_{M_0}$.

Folosind rezultatele de la condițiile suficiente de extrem liber dacă $d^2\Phi|_{M_0} > 0$, punctul M_0 este punct de minim iar dacă $d^2\Phi|_{M_0} < 0$ punctul M_0 este punct de maxim.

Diferențiala de ordinul II a funcției Φ o calculăm ca și când funcția Φ depinde de variabilele independente $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$; în realitate $y_1, y_2, \dots, y_m$ nu sînt independente ci depind de $x_1, \dots, x_n$; deci pentru stabilirea semnului lui $d^2\Phi$ vom înlocui $dy_1, \dots, dy_m$ prin $dx_1, \dots, dx_n$ din relațiile (25).

Problemele de determinare a extremelor unei funcții atunci când variabilele sînt supuse unor legături, constituie de fapt obiectul unei ramuri de matematică modernă în plină dezvoltare: Programarea matematică.

Problema generală a „Programării matematice” poate fi formulată astfel.

Să se determine valorile variabilelor $x_1, x_2, \dots, x_n$ supuse condițiilor:

$$g_i(x_1, \dots, x_n) \geq 0, \quad i = 1, \dots, k$$

$$h_j(x_1, \dots, x_n) \leq 0, \quad j = 1, \dots, l$$

$$u_s(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad s = 1, \dots, p$$

și care maximizează sau minimizează o funcție $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (F se numește funcție obiectiv).

Numeroase probleme economice și tehnice conduc la asemenea modele: (exemplu: determinarea planului optim a unei întreprinderi care trebuie să se supună unor condiții de forma: consumul de metal să fie limitat superior, consumul de energie electrică limitat superior, valoarea producției la un anumit produs să fie limitată inferior).

În cazul în care funcția F și restricțiile sînt funcții liniare problema enunțată devine o problemă de programare liniară (problema matematică generală a programării liniare a fost dată de Danzig în 1947).

Dacă F este o funcție neliniară se obține o problemă de programare neliniară.

Dacă coeficienții ce apar în funcția F sau în restricții nu sînt constante ci variază după o anumită lege determinată, problema de programare este parametrică. Dacă coeficienții din F sau din restricții variază aleator atunci problema este de programare stochastică.

Dacă soluțiile care ne interesează sînt numere întregi problema este de programare discretă.

Pentru fiecare din aceste tipuri de probleme există metode specifice, ce conduc la algoritmi cu ajutorul cărora se poate folosi calculatorul.

Exemplu. Determinăm extremele funcției

$$u = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

cu legătura $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 3$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Formăm funcția lui Lagrange și căutăm punctele staționare libere ale acesteia.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3).$$

Obținem sistemul

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \equiv 3x_1^2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} \equiv 3x_2^2 + 2\lambda x_2 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \equiv 3x_3^2 + 2\lambda x_3 = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

care are soluția ce îndeplinește condiția $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ dată de:

$$\lambda = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Pentru a stabili dacă acesta este punct de extrem calculăm semnul lui $d^2\Phi$. Avem

$$d^2\Phi = (6x_1 + 2\lambda) dx_1^2 + (6x_2 + 2\lambda) dx_2^2 + (6x_3 + 2\lambda) dx_3^2.$$

În punctul staționar obținem:

$$d^2\Phi|_{M_0} = 3(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Ținând seama de legătură avem

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$$

deci

$$dx_3 = -(dx_1 + dx_2) \text{ de unde rezultă}$$

$$d^2\Phi|_{M_0} = 3[dx_1^2 + dx_2^2 + (dx_1 + dx_2)^2] > 0$$

deci punctul M_0 este punct de minim.

§ 6. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE ÎN $\mathbf{R}^n$

Fie $y = f(x)$, $f: X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbf{R}^n$. Spunem că Y este imaginea sau transformata mulțimii X prin f .

Exemple: 1) Funcția vectorială:

$$y = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

transformă mulțimea $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ din $\mathbf{R}^3$ în sferă închisă de rază $r = a$ din $\mathbf{R}^3$ (Fig. 13, a).

Semnificațiile lui r , θ , φ sînt date în figura 13, b.

Coordonatele (r, θ, φ) se numesc coordonatele sferice ale punctului $M(y_1, y_2, y_3)$.

2) Funcția vectorială

$$y = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, \lambda)$$

transformă mulțimea: $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \lambda \leq b$ în cilindrul drept de ecuație $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq b$. Transformarea este reprezentată în figura 13, c.

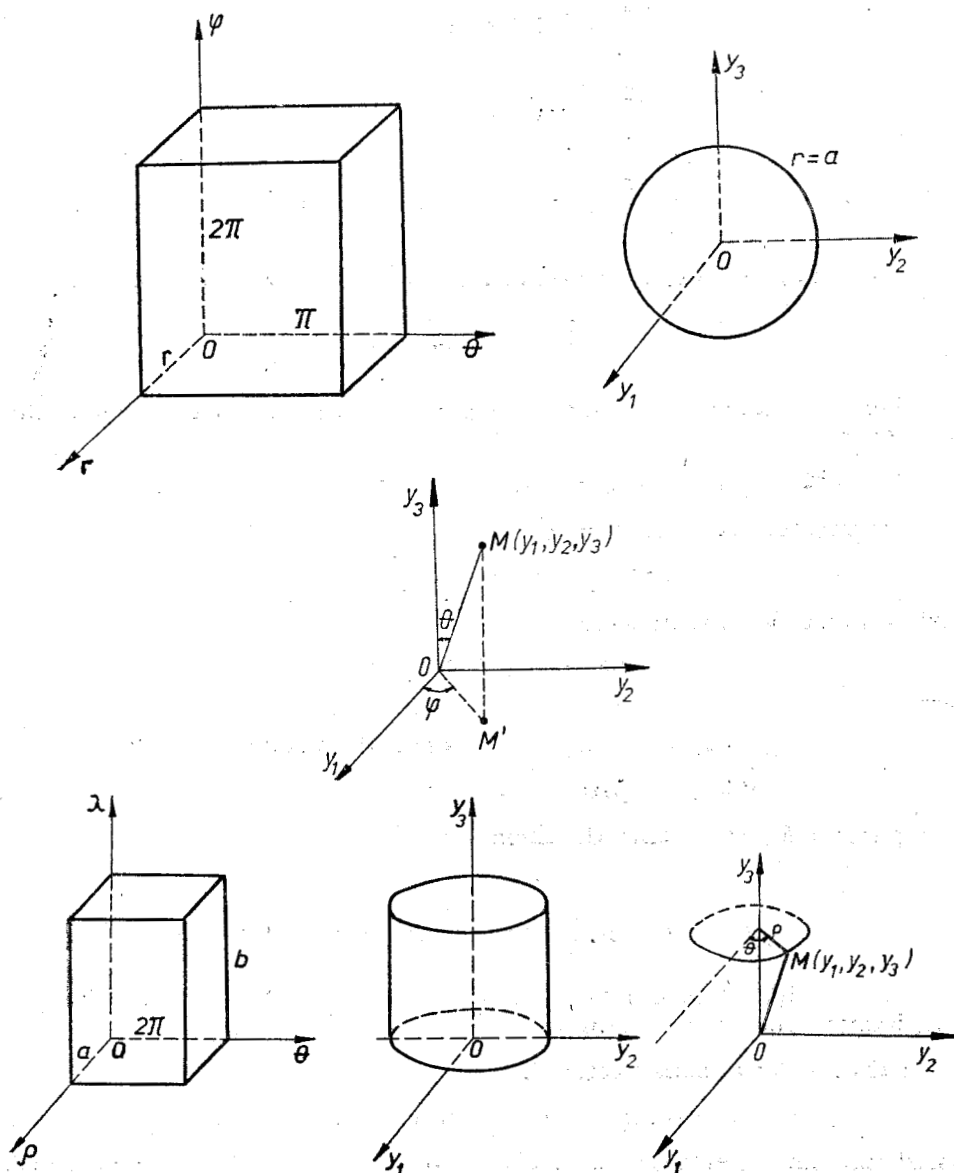


Fig. 13. a, b, c, d.

Legătura între ρ , θ , λ și y_1 , y_2 , y_3 este ilustrată în figura 13, d.
Coordonatele (ρ, θ, λ) se numesc coordonate cilindrice ale punctului $M(y_1, y_2, y_3)$.

Definiția 1.6. Fie $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow y \in Y \subset \mathbb{R}^n$ și $x_0 \in X$.

Transformarea $y = f(x)$, $x \in X$ este regulată în punctul x_0 dacă

1) funcția $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ are derivate parțiale continue într-o vecinătate V a punctului x_0 .

2) determinantul asociat matricei Jacobi este:

$$\left| \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right|_{x_0} \neq 0$$

O transformare regulată în fiecare punct dintr-un domeniu D se numește regulată în D .

Are loc

Teorema 1.6. Compunerea a 2 transformări regulate este o transformare regulată.

Demonstrație. Fie $y = f(x)$, $f: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow Y \subset \mathbb{R}^n$ o transformare regulată în punctul x_0 și $u = g(y)$, $g: Y \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ o altă transformare regulată în $y_0 = f(x_0)$ ($f = (f_1, \dots, f_n)$, $g = (g_1, \dots, g_n)$).

Compunerea funcțiilor f și g ne conduce la a considera transformarea

$$u = g(f(x)), \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow u \in U \subset \mathbb{R}^n.$$

Arătăm că $u = g(f(x))$ este o transformare regulată în $x_0 \in X$ ($u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$).

Din regula de derivare a funcțiilor compuse obținem că matricea Jacobi a derivatei lui $u(x)$ este:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{array} \right\| = \\ & = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{array} \right\| \end{aligned}$$

de unde rezultă că $\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ și deci derivatele parțiale $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ sînt continue.

De asemenea luînd în egalitatea matricilor anterioare determinanții obținem:

$$\left| \frac{D(u_1, u_2, \dots, u_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right| = \left| \frac{D(g_1, \dots, g_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right| \left| \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right|.$$

În legătură cu posibilitatea existenței inversei unei funcții vectoriale de variabilă vectorială are loc:

Teorema 2.6. Dacă $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n \rightarrow y \in Y \subset \mathbf{R}^n$ este o transformare regulată în $x_0 \in X$ atunci există o transformare $x = \varphi(y)$, definită într-o vecinătate $V(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ astfel încît

1) $x = \varphi(y)$ este o transformare regulată în y_0

$$2) \left\| \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right\|_{y_0} = \frac{1}{\left\| \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right\|_{x_0}}$$

Transformarea $x = \varphi(y)$ se numește *transformare inversă*.

Demonstrație. Sistemul de funcții $F(x) \equiv f(x) - y$, $x \in X$ îi aplicăm teorema de existență a funcțiilor implicite.

Condițiile sînt îndeplinite deoarece:

a) $F(x_0) \equiv f(x_0) - y_0 = 0$ unde $y_0 = (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))$

b) $F(x)$ are derivate parțiale continue în raport cu x într-o vecinătate a punctului x_0 deoarece f are derivate parțiale continue

$$c) \left\| \frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \right\|_{x_0} = \left\| \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right\|_{x_0} \neq 0$$

În baza teoremei de la sisteme de funcții implicite există o funcție $x = \varphi(y)$, $y \in V(y_0)$ astfel încît: $y = f(\varphi(y))$, $(\forall) y \in V(y_0)$ ($\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$).

Derivînd în sistemul $y = f(\varphi(y))$ în raport cu y și folosind regula de derivare a funcțiilor compuse obținem pentru $y \in V(y_0)$.

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{array} \right\|$$

de unde rezultă luând determinanții că

$$1 = \left| \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right|_{x_0} \cdot \left| \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right|_{y_0}.$$

Schimbări de variabile

Schimbarea variabilelor independente la funcțiile de o variabilă.

Fie $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R} \rightarrow y \in Y \subset \mathbb{R}$ și funcția $x = \varphi(t)$, $t \in T$, $f, \varphi \in C^{(2)}$
Funcția compusă

$$y = f(\varphi(t)), \quad t \in T$$

realizează o aplicație a mulțimii X în mulțimea Y .

Aplicând regula de derivare a unei funcții compuse obținem:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

de unde rezultă

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad (\varphi(t) = x)$$

relația care exprimă derivata $\frac{df}{dx}$ prin derivata $\frac{dy}{dt}$.

Regula cu care se calculează derivatele de ordin superior este dată de:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{d}{dt}.$$

Deci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(t)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{\varphi'(t)} \left(-\frac{\varphi''}{\varphi'^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\varphi'} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \right).$$

Exemplu: În ecuația $(1-x^2)y'' + xy' = 0$ se face schimbarea de variabilă $x = \cos t$. În ce se transformă ecuația?

Avem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ deci $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt}$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{\sin t} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{dy}{dt} \right) = \\ &= -\frac{1}{\sin t} \left(-\frac{1}{\sin t} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{\sin^2 t} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t} \frac{dy}{dt}. \end{aligned}$$

Înlocuind în ecuație obținem:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \operatorname{ctg} t \frac{dy}{dt} = 0$$

Schimbarea variabilelor independente la funcțiile de două variabile

Fie funcția $z = f(x, y)$; $f: X \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow Z \subset \mathbf{R}$ și funcțiile $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ definite pe $V \subset \mathbf{R}^2$, $(x, y) \in X$, $f, \varphi, \psi \in C^{(2)}$

Din compunerea funcțiilor f, φ și ψ rezultă $Z(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Aplicând regula de derivare a unei funcții compuse avem:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

de unde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{D} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}}{D} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

și la fel

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{D} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{D} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

Pentru calculul derivatelor de ordinul 2 se folosesc operatorii

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{D} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial u}}{D} \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{D} \frac{\partial}{\partial v} - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{D} \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

Exemplu. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ dacă se face schimbarea de variabile $x = u^2 + v^2$, $y = uv$, $z \in C^{(2)}$
 Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2u + v \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2v + u \frac{\partial z}{\partial y},$$

și cum

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u}$$

urmează că

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{u}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u} \right) - \\ &\quad - \frac{v}{2(u^2 - v^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u} \right) = \\ &= - \frac{uv}{2(u^2 - v^2)^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + \frac{u^2 + v^2}{2(u^2 - v^2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \\ &\quad + \frac{v(3u^2 + v^2)}{2(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{u(3v^2 + u^2)}{2(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial z}{\partial v}. \end{aligned}$$

Transformarea punctuală a curbelor plane

Fie $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ o transformare a curbei $C: y = \varphi(x) \rightarrow \Gamma: v = \psi(u)$.

Diferențiind obținem:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

de unde

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} y'}{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'}$$

relație din care scoatem valoarea lui y' în funcție de u, v și $v'(u)$

Exemplu: Să se transforme relația

$$y'' + xy'^3 = 0$$

prin schimbarea $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$; $\rho = \rho(t)$.

Ținând seama că

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t} \right) = \frac{1}{\rho' \cos t - \rho \sin t} \cdot \\ &\cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t} \right) = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3}, \end{aligned}$$

ecuația dată devine:

$$2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 + \rho \cos t (\rho' \sin t + \rho \cos t)^3 = 0$$

Transformarea punctuală a suprafețelor

O transformare punctuală

$$u = f(x, y, z), \quad v = g(x, y, z), \quad w = h(x, y, z)$$

cu f, g, h definite pe $X \subset \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$, $f, g, h \in C^{(1)}$ transformă ecuația $z = \varphi(x, y)$ în ecuația $w = \psi(u, v)$.

Diferențiind relațiile de mai sus obținem

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

Eliminând du , dv între aceste relații obținem:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \right) + \\ & + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \right) = \\ & = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} \left(\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \end{aligned}$$

de unde egalând coeficienții lui dx și dy rezultă expresiile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ în funcție de u, v, w și $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Exemplu: Să se transforme relația

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z, \quad z = z(x, y)$$

dacă se face schimbarea: $x + z = u$, $y + z = v$, $x + y = w$, $w = w(u, v)$.
Avem:

$$dx + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = du$$

$$dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = dv$$

$$dx + dy = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

Eliminând pe du și dv obținem:

$$\begin{aligned} dx + dy &= \frac{\partial w}{\partial u} \left(dx + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) + \\ &+ \frac{\partial w}{\partial v} \left(dy + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \right) \end{aligned}$$

de unde:

$$1 = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right)$$

$$1 = \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right)$$

sau

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial u}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \frac{\partial w}{\partial v}}{\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}}$$

Înlocuind în ecuație aceasta devine:

$$(u + w - v) \frac{\partial w}{\partial u} + (w + v - u) \frac{\partial w}{\partial v} = 3w - u - v.$$

Exerciții propuse

14 Să se calculeze dz pentru funcția $z(x, y) = f\left(\frac{x}{y}, xy\right)$ unde $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabilă în D .

24 Folosind formula lui Taylor să se calculeze cu aproximație $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$.

Ind. Se consideră funcția $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ care se dezvoltă în jurul punctului $(1, 0)$.

34 Să se calculeze $E = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dacă $z(x, y) = \ln(u^2(x, y) + v^2(x, y))$, $u(x, y) = xy$ și $v(x, y) = x^2 - y^2$.

44 Să se calculeze derivata funcției

$$u(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

după direcția vectorului $\overrightarrow{AB}$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, -2)$.

54 Să se determine extremele funcțiilor

$$z(x, y) = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)} - (x^2 + y^2)$$

$$R: z_{\min} = 0$$

$$z(x, y) = \sqrt{(a-x)(a-y)(x+y-a)}$$

$$R: z_{\max} = \frac{a\sqrt{3a}}{9}$$

6) Să se determine extremele funcțiilor de mai mult de 2 variabile.

$$v(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{4}; x > 0, y > 0, z > 0$$

$$R: v_{min} = \frac{15}{4} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$

$$w(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3 (1 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

$$R: w_{max} = \left(\frac{1}{7}\right)^7$$

7) Ecuația $\ln \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 1$ definește în anumite condiții $y = y(x)$. Care sînt aceste condiții? Să se calculeze în acest caz y' .

$$R: y' = \frac{y}{x}$$

8) În ce condiții ecuația $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z-x}$ definește $z = z(x, y)$?

Să se determine în aceste condiții $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$R: \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

9) Sistemul de ecuații funcționale:

$$\begin{cases} x^3 + yz + z^2 = xy \\ xz + yz^2 = 2 \end{cases}$$

definește $y = y(x)$ și $z = z(x)$. Să se calculeze dz și dy .

10) Să se studieze extremele funcției: $z = z(x, y)$ definită de ecuația funcțională

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$$

11) Să se determine extremele funcției

$$z(x, y) = x^2 + y^2 \text{ în discul } (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$$

Ind. Se studiază extremele libere ale funcției z și se aleg acele puncte de extrem situate în disc. Apoi se studiază extremele funcției z supusă la legătura $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

12) Extremele funcției $u(x, y, z) = xyz$ dacă

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$$

R : 3 puncte de minim și 3 puncte de maxim

$$u_{min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}, \quad u_{max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

13. Să se determine distanța între dreptele

$$D_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$D_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

14. Să se înscrie într-un con circular drept dat un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

15. Să se transforme expresia:

$$E = y\sqrt{1 + y'^2} + y^2 - x^2 + y''$$

cînd se face transformarea:

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{x^2 + y^2}{x}, \quad v = v(u)$$

16. Să se transforme ecuația $yy'' - y'^2 + ye^x = 0$ prin schimbarea: $v = y$, $u = e^x$; $v = v(u)$.

17. Să se transforme ecuația $xy'' + \frac{2}{y} = 0$ prin schimbarea $x = x(y)$.

18. Să se transforme expresia:

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

dacă $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = z(\rho, \theta)$

CAPITOLUL IV

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

Folosirea seriilor de funcții și, în special a seriilor de puteri apare necesară adeseori în rezolvarea unor probleme tehnice. Studiul lor se face pe baza cunoștințelor de la serii de numere.

§ 1. ȘIRURI DE FUNCȚII

Definiția 1.1. Numim șir de funcții $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ o aplicație a mulțimii $\mathbf{N}$, a numerelor naturale în mulțimea funcțiilor definite în $X \subset \mathbf{R}^m$ cu valori în $\mathbf{R}^k$.

Vom nota un șir de funcții prin $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Dacă fixăm pe $x = x_0 \in X \subset \mathbf{R}^m$, șirul obținut este un șir de numere:

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots$$

care poate fi convergent sau nu, în sensul definiției date la șirurile numerice. Vom da următoarea:

Definiția 2.1. Punctul $x_0 \in D$ este punct de convergență al șirului $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dacă șirul valorilor $(f_n(x_0))_{n \in \mathbf{N}}$ este un șir din $\mathbf{R}^k$ convergent.

Mulțimea A a elementelor $x \in X$ pentru care șirurile $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ sînt convergente se numește *mulțime de convergență* a șirului de funcții.

Exemple 1. Șirul de funcții $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

este convergent pentru orice $x \neq 0$ deoarece

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x \neq 0}} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\frac{nx^2}{2}}} = 0.$$

Cînd $x = 0$, $f_n(0) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) = \infty$.

Deci mulțimea de convergență $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Aceste funcții apar în fizică, în teoria undulatorie a luminii.

2. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$ converge în $(0, 1]$ către funcția f definită prin

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Având în vedere aceste observații dăm următoarea:

Definiția 3.1. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ este convergent către f în X dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ astfel încît pentru $n > n_0$,

$$\|f_n - f\| < \varepsilon.$$

Observație. Definiția 3 exprimă faptul că șirurile obținute pentru diferite valori ale lui $x \in X$ sînt convergente.

Dacă cerem ca în definiția 3, n_0 să depindă numai de ε obținem noțiunea de convergență uniformă. Dăm:

Definiția 4.1. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ converge uniform pe X către f dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $x \in X$,

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$$

dacă $n \geq n_0(\varepsilon)$.

1. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definit prin $f_n(x) = x^n$, $x \in (0, 1]$ nu este uniform convergent deoarece pentru $x_n = 1 - \frac{1}{n} \in (0, 1)$, șirul $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ converge către $\frac{1}{e}$ și $\left|\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right|$ nu poate fi făcut oricît de mic deoarece converge la $1 - \frac{1}{e}$ (fig. 14).

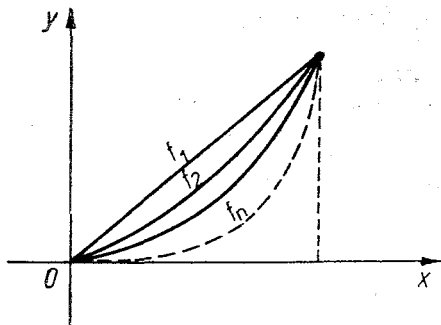


Fig. 14

2. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n(x) = \frac{x^3}{x^3 + n^3}$, $x \in (-1, +\infty)$, nu este uniform convergent către funcția $f(x) = 0$ deoarece pentru $x_n = n \in (-1, \infty)$,

$$|f_n(n) - f(n)| = \frac{1}{2}$$

și deci această diferență nu poate fi făcută oricît de mică (fig. 15).

Observație. Un șir de funcții uniform convergent este și simplu convergent. Reciproca nu este adevărată.

Vom prezenta în continuare criterii de convergență uniformă care ne permite să decidem dacă un șir este uniform convergent fără să-i cunoaștem limita.

Are loc

Teorema 1.1. (Criteriul de convergență uniformă a lui Cauchy.) Condiția necesară și suficientă ca șirul f_n cu $f_n(x): X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$ să fie uniform convergent în X este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $n_0(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n > n_0(\varepsilon)$ și $p > 1$,

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| < \varepsilon.$$

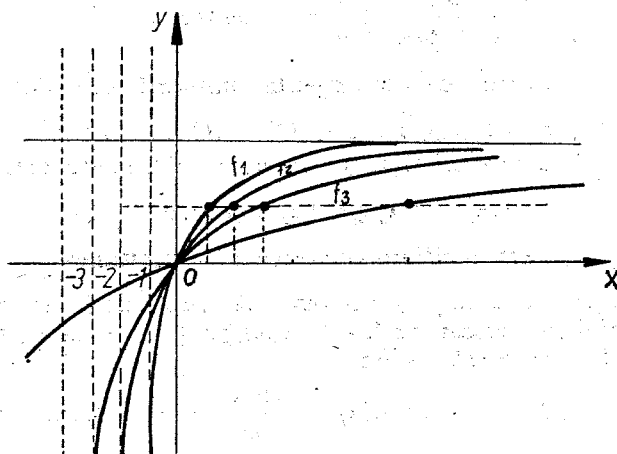


Fig. 15

Demonstrație. Presupunem $f_n \xrightarrow{n.c.} f, x \in X$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$, astfel încât

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon).$$

La fel $\|f_{n+p}(x) - f(x)\| < \varepsilon \text{ pentru } p > 1.$

Rezultă

$$\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| \leq \|f_{n+p}(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_n(x)\| < 2\varepsilon.$$

Invers, să presupunem că este îndeplinită condiția lui Cauchy. Putem spune că un șir de vectori,

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots, x_0 \in X$$

verifică criteriul lui Cauchy. Un asemenea șir este convergent către un vector $f(x_0)$.

Pentru diferitele valori $x_0 \in X$, obținem o funcție $f(x)$, $x \in X$. Arătăm că $f_n(x)$ converge uniform către $f(x)$.

Considerăm $\|f_{n+p}(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $p > 1$. Trecând la limită când $p \rightarrow \infty$, obținem $\|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon$ ceea ce arată că șirul este uniform convergent.

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $x \in [0, \infty)$ este uniform convergent conform criteriului lui Cauchy deoarece:

$$\begin{aligned} |x \operatorname{arctg} (n+p)x - x \operatorname{arctg} nx| &= x \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{px}{1 + (n+p)nx^2} \right) < \\ &< x \cdot \operatorname{arctg} \frac{px}{(n+p)nx^2} < x \cdot \frac{p}{(n+p)nx} = \\ &= \frac{p}{(n+p)n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ pentru } n > \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Un criteriu suficient de convergență uniformă este dat de

Teorema 2.1. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n: X \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, și f o funcție definită în X . Dacă există un șir de vectori $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent către zero, astfel ca:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \|a_n\| \text{ pentru } n > n_0$$

atunci, șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent pe mulțimea X către funcția f .

Demonstrație. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge la zero, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $n > n_0(\varepsilon)$, $\|a_n\| < \varepsilon$ și deci $\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ ceea ce demonstrează teorema.

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$ este uniform convergent pe $\mathbb{R}$ către $f \equiv 0$ deoarece:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| < \frac{1}{n^2} \rightarrow 0.$$

Proprietăți ale șirului de funcții uniform convergente în $\mathbb{R}$.

Teorema 3.1. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții continue, uniform convergent către funcția f în $X \subset \mathbb{R}^m$.

Atunci funcția limită f este continuă în X .

Demonstrație. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent către f deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât

$$\|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon, \text{ dacă } n > n_0(\varepsilon).$$

Funcția $f_n(x)$ este continuă în orice punct din X deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, x_0)$ astfel încât

$$\|f_n(x) - f_n(x_0)\| < \varepsilon$$

pentru $\|x - x_0\| < \eta(\varepsilon, x_0)$.

Putem scrie

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(x_0)\| &\leq \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \\ &+ \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < 3\varepsilon \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon) \end{aligned}$$

și

$$\|x - x_0\| < \eta(\varepsilon, x_0),$$

ceea ce exprimă continuitatea funcției f în punctul x_0 .

O altă proprietate a șirurilor de funcții uniform convergente în $\mathbf{R}$ este dată în:

Teorema 4.1. Fie $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ un șir de funcții definite și derivabile pe $X \subset \mathbf{R}$ convergent către f pe X . Dacă șirul $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este uniform convergent către g pe X atunci f este derivabilă pe X și $f' = g$.

Demonstrație. Fie $x_0 \in (a, b)$. Șirul $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este uniform convergent către g pe (a, b) deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f'_n(x) - g(x)| < \varepsilon, \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon) \text{ și } x \in (a, b).$$

Funcția f_n este derivabilă deci există $V(x_0)$ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f'_n(x_0) \right| < \varepsilon, \quad x \in V(x_0).$$

Considerăm egalitatea:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0)}{x - x_0} \right| = \\ &= \left| \frac{(f_n(x) - f_{n+p}(x)) - (f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0))}{x - x_0} \right| = \\ &= |f'_n(c) - f'_{n+p}(c)|, \quad c \in (x_0, x). \end{aligned}$$

Deoarece șirul $(f'_n)_{n \in \mathbf{N}}$ este uniform convergent rezultă $|f'_n(c) - f'_{n+p}(c)| < \varepsilon$, pentru $n > n_1(\varepsilon)$.

Putem scrie:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \right| + \\ &+ \left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f'_n(x_0) \right| + |f'_n(x_0) - g(x_0)| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

pentru $x \in V$ și $n > \max(n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon))$ și $x \in V$.

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, cu $f_n(x) = \frac{1}{n} \operatorname{arctg} x^n$, $n \in \mathbf{N}$ este uniform convergent în $(-2, 2)$ către funcția $f(x) \equiv 0$.

Șirul derivatelor este

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n}} \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

deci el nu converge către $f'(x)$.

(Observăm că șirul derivatelor nu este uniform convergent.)

Vom enunța un rezultat mai puternic a cărei demonstrație o vom schița numai.

Teorema 5.1. (Stone Weierstrass). Dacă f este o funcție continuă pe $[a, b] \subset \mathbf{R}$ există un șir de polinoame $P_n(x)$ astfel ca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = f(x)$$

convergența fiind uniformă în $[a, b]$.

Etapele demonstrației. Presupunem $[a, b] = [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ și $f(x)$ nulă înafara lui $[a, b]$.

Aceasta nu restrânge generalitatea deoarece pentru $f(x)$ oarecare putem pune:

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)), \quad x \in [0, 1]$$

rezultă că $g(0) = g(1) = 0$.

Definim polinoamele $Q_n(x) = C_n(1 - x^2)^n$, $n = 1, 2, \dots$ pentru care alegem coeficienții C_n astfel ca

$$\int_{-1}^1 Q_n(x) = 1$$

Se demonstrează că polinoamele $Q_n(x)$ converg uniform în $[\delta, 1]$, $\delta > 0$. Dacă luăm

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t) Q_n(t) dt, \quad x \in [0, 1]$$

arătăm că $P_n(x)$ este un polinom de grad n . Observăm că $-1 \leq x+t \leq 2$, dar f este nulă înafara intervalului $[0, 1]$ deci rămîne de studiat integrala pentru $0 \leq x+t \leq 1$ adică $-x \leq t \leq 1-x$.

Fie deci pentru $x+t = u$

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t) Q_n(t) dt = \int_0^1 f(u) Q_n(u-x) du$$

deci $P_n(x)$ este un polinom de grad „ n ” în x .

Exemplu. Să se determine șirul de polinoame $P_n(x)$ care converge uniform pe $[0, 1]$ către funcția $f(x) = \frac{1}{2-x}$.

Determinăm

$$I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = I_{n-1} - \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$C_n = \frac{1}{\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx} = \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot (2n)!!}$$

$$Q_n(x) = \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot (2n)!!} (1-x^2)^n$$

$$P_n(x) = \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^n}{2-x-t} dt$$

§ 2. SERII DE FUNCȚII. SERII DE PUTERI

Dacă $f_n, f_n: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$ sînt funcții, considerăm șirul sumelor parțiale

$$s_n = \sum_{i=1}^n f_i, \quad n = 1, 2, \dots$$

ale seriei

$$\sum_1^{\infty} f_i$$

și dăm următoarea

Definiția 1.2. Seria $\sum_1^{\infty} f_i$ se numește convergentă în $X \subset \mathbb{R}^m$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent în X . Funcția $s = \lim_n s_n$ se numește suma seriei $\sum_1^{\infty} f_n$.

Definiția 2.2. Seria $\sum_1^{\infty} f_n$ converge simplu sau punctual către s dacă șirul de funcții s_n converge simplu în X .

Mulțimea A a valorilor $x \in X$ pentru care seria $\sum_1^{\infty} f_n$ este convergentă se numește mulțimea de convergență. Are loc următorul criteriu de convergență uniformă.

Teorema 1.2. (Criteriul lui Cauchy). Condiția necesară și suficientă ca seria de funcții $\sum_1^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă în X este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $p > 1$ să avem:

$$\|f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p}\| < \varepsilon.$$

Demonstrația rezultă din Criteriul lui Cauchy aplicat șirului sumelor parțiale.

Un criteriu suficient de convergență uniformă este dat de

Teorema 2.2. (Weierstrass). Dacă seria de funcții $\sum_1^{\infty} f_n$, $f_n \in X$ este majorată de o serie de numere $\sum_1^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ (adică $\|f_n\| < a_n$) convergentă, atunci seria dată converge uniform în X .

Demonstrație. Seria $\sum_1^{\infty} a_n$ fiind convergentă există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît să avem:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$$

pentru $n > n_0(\varepsilon)$ și orice $p > 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Cu notațiile de mai sus avem:

$$\begin{aligned}\|s_{n+p} - s_n\| &< \|f_{n+1}\| + \|f_{n+2}\| + \dots + \|f_{n+p}\| < \\ &< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon,\end{aligned}$$

pentru $n > n_0(\varepsilon)$ și oricare ar fi p natural.

Rezultă de aici că seria este uniform convergentă conform criteriului lui Cauchy.

Transpunând rezultatele privind proprietățile șirurilor uniforme, pentru șirul sumelor parțiale enunțăm:

Teorema 3.2. Fie $\sum_1^\infty f_n$ o serie de funcții, $f_n: X \subset \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$. Dacă seria de funcții $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ este uniform convergentă către funcția f pe mulțimea X și dacă funcțiile f_n sînt continue în X ; atunci funcția sumă $s: X \rightarrow \mathbf{R}^k$ este continuă în X .

Demonstrația rezultă din teorema corespunzătoare aplicată șirului sumelor parțiale.

Teorema 4.2. Dacă seria de funcții $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$, $f_n \in X \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ este o serie de funcție derivabile, convergentă către f în X , dacă seria de funcții $f'_1 + f'_2 + \dots + f'_n + \dots$ este o serie de funcții uniform convergentă către g pe X atunci, s este derivabilă și $f' = g$.

Demonstrația rezultă din aplicarea teoremei privind derivarea termen cu termen pentru șirul sumelor parțiale.

Exemplu. Seria de funcții $\sum_1^\infty (-1)^{n+1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ este uniform convergentă în $\mathbf{R}$ conform criteriului lui Cauchy deoarece

$$\begin{aligned}|f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p}| &= \left| \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+p}} \right| = \\ &= \left| \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+p-1}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \right| \leq \\ &\leq x^4 \left(\frac{1}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{n+4}} + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^{n+p}} \right) = \\ &= \frac{x^4}{(1+x^2)^{n+2}} \left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^p} \right) \frac{1+x^2}{x^2} \leq \\ &\leq \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \leq \frac{x^2}{1+(n+1)x^2} \leq \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Serii de puteri

Definiția 3.2. O serie de funcții de forma

$$a_0 + \sum_1^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbf{R}$$

se numește serie de puteri.

Funcția sumă a unei serii de puteri se numește funcție analitică.

Mulțimea de convergență a unei serii de puteri este totdeauna un interval. Acest lucru se demonstrează în

Teorema 5.2. (Abel) Pentru orice serie $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ există un număr $R \geq 0$ astfel încît.

1°. Seria este absolut convergentă în $(-R, R)$

2°. Seria este divergentă pentru $|x| > R$.

Demonstrație. Observăm că seria este convergentă în $x = 0$. Dacă nu are un alt punct de convergență luăm $R = 0$ și teorema este demonstrată.

Să presupunem că mulțimea de convergență mai conține și alte puncte. Fie un punct de convergență, punctul x_0 .

Deoarece seria de numere:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

este convergentă rezultă că $|a_n x_0^n| \rightarrow 0$ cînd $n \rightarrow \infty$ și deci, există $M > 0$ astfel ca $|a_n x_0^n| < M$. Dacă x verifică condiția $|x| < |x_0|$ putem scrie:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n.$$

Însă $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$ deci, conform criteriului comparației $\sum_0^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Notăm cu R marginea superioară a mulțimii valorilor lui x pentru care seria $\sum a_n x^n$ este convergentă. În baza celor de mai sus rezultă că seria este convergentă pentru $x \in (-R, R)$.

Dacă x_1 este un punct de divergență a seriei atunci pentru orice x cu $|x| > |x_1|$ seria este divergentă. Dacă ar exista un punct x_2 pentru care seria este convergentă cu $|x_2| > |x_1|$ ar urma ca seria $\sum |a_n x_1|^n$ este convergentă ceea ce nu este adevărat.

Definiția 4.2. Numărul R se numește raza de convergență a seriei de puteri.

Pentru determinarea razei de convergență considerăm pe x fixat și aplicăm unul din criteriile de la serii cu termeni pozitivi seriei

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots$$

Aplicînd criteriul raportului obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x| < 1,$$

deci

$$|x| < \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|}.$$

În acest caz $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Aplicînd criteriul rădăcinii aceleiași serii obținem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$$

sau $|x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ deci $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Exemplu: Să determinăm mulțimea de convergență pentru seria

$$\sum_2^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^{\alpha} n} x^n, \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

În acest caz $|a_n| = \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^{\alpha} n}$ și

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} \cdot \frac{(n+1)}{n} \cdot \frac{\ln^{\alpha}(n+1)}{\ln^{\alpha} n} = 1$$

Pentru $x = 1$ obținem seria de numere

$$\sum_2^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^{\alpha} n}$$

alternată care este convergentă conform criteriului lui Leibniz pentru $\alpha > 0$.

Pentru $x = -1$ obținem seria de numere

$$\sum_2^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n \ln^{\alpha} n}$$

convergentă pentru $\alpha > 1$ (serie Bertrand).

Mulțimea de convergență este $[-1, 1]$ pentru $\alpha > 1$.

În intervalul de convergență seriile de puteri au proprietatea dată de următoarea:

Teoremă 6.2. Dacă seria $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$ este convergentă pentru $|x| < R$ atunci seria este uniform convergentă pe $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < R$.

Demonstrație: Dacă $|x| \leq R - \varepsilon$ atunci

$$|a_0 x^n| \leq |a_n (R - \varepsilon)^n|$$

și cum seria $\sum a_n (R - \varepsilon)^n$ converge absolut, seria $\sum |a_n x^n|$ converge uniform pe $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Consecință. Din proprietățile seriilor de funcții uniform convergente rezultă că într-un interval $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$, seria de puteri are ca sumă o funcție continuă și de asemenea poate fi derivată termen cu termen.

Observație. Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergență R , seria derivatelor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

are aceeași rază de convergență deoarece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1) a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R.$$

Seria Taylor.

Fie f o funcție definită pe $[a, b]$ indefinit derivabilă în punctul $\alpha \in (a, b)$. Formula lui Taylor conduce la dezvoltarea

$$\begin{aligned} f(x) = f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \dots \\ \dots + \frac{(x - \alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + R_n(x). \end{aligned}$$

Cind $R_n(x) \rightarrow 0$ pentru $n \rightarrow \infty$ se obține seria Taylor a funcției f în punctul α , serie convergentă către $f(x)$

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \dots + \frac{(x - \alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + \dots$$

O condiție suficientă pentru ca formula lui Taylor să se transforme în seria Taylor este dată de

Teorema 7.2. Seria Taylor a funcției f în jurul punctului „ α ” este convergentă într-o vecinătate V a punctului „ α ” dacă derivatele de orice ordin sînt egal mărginite în V adică

$$|f^{(n)}(x)| < M, M > 0$$

pentru orice $x \in V$ și orice n natural.

Demonstrație. Restul R_n sub forma lui Lagrange, este:

$$R_n(x) = \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (\alpha, x) \subset V$$

$$|R_n(x)| < \left| \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \right| M.$$

Seria de termen general $u_n(x) = \left| \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{(n+1)!} \right|$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x - \alpha}{n+1} \right| = 0,$$

și obținem de aici că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

Cînd $\alpha = 0$ se obține seria Mac-Laurin.

Exemple:

1. Fie $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.

Pentru orice $x \in (-A, A)$, $e^{-A} \leq e^x \leq e^A$ deci $|f^{(n)}(x)| < M$ și

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2. Dacă $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$

$$f^{(n)}(x) = \sin \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \text{ și } |f^{(n)}(x)| \leq 1 \text{ pentru } x \in \mathbf{R}.$$

Obținem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3. Pentru $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$

$$f^{(n)}(x) = \cos \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \text{ și } |f^{(n)}(x)| < 1$$

deci

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

4. Fie $f(x) = (1+x)^\lambda$, $x \in \mathbf{R}$, λ constantă reală. Căutăm o serie Mac Laurin pentru funcția $f(x)$.

Avem

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

$$\text{cu } R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n! p} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

$$f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1) (x+1)^{\lambda-k}$$

deci

$$f^{(k)}(0) = \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-k+1)$$

și

$$f(x) = 1 + \frac{\lambda}{1!} x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)}{n!} x^n + R_n(x)$$

$$\text{cu } R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!} \lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n) x^{n+1} (1+\theta x)^{\lambda-n-1}.$$

Luăm $p = 1$ și obținem:

$$R_n(x) = u_n (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\lambda-n-1}$$

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n)}{n!} x^{n+1}.$$

Seria cu termenul general u_n este absolut convergentă pentru $|x| < 1$ deoarece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda-n-1}{n+1} \right| |x| = |x| < 1.$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

$$\text{Factorul } V_n = (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\lambda-n-1} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n (1+\theta x)^{\lambda-1}$$

ține la zero în valoare absolută deoarece

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1 \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

Astfel

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \quad \text{pentru orice } \lambda \in \mathbf{R} \text{ și } |x| < 1.$$

Am obținut deci dezvoltarea numită *seria binomului generalizat*.

$$(1+x)^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1) \dots (\lambda-n+1)}{n!} x^n + \dots$$

5. Să considerăm dezvoltările în serie:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

și $i = \sqrt{-1}$. Putem scrie

$$\cos x + i \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\dots + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right),$$

$$\cos x - i \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\dots - i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right).$$

Formal avem:

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

de unde

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

numite *formulele lui Euler*.

Operații cu serii de puteri.

1. Dacă $\sum_0^\infty a_n x^n$ și $\sum_0^\infty b_n x^n$ sînt 2 serii de puteri cu razele de convergență R_1 respectiv R_2 atunci seria de puteri $\sum_0^\infty (a_n + b_n) x^n$ numită suma celor două serii are raza de convergență $R = \min_0 (R_1, R_2)$.

2. Dacă $\sum_0^\infty a_n x^n$ și $\sum_0^\infty b_n x^n$ au razele de convergență R_1 , respectiv R_2 numim seria produs, seria $a_0 b_0 + x(a_1 b_0 + a_0 b_1) + \dots + x^n(a_n b_0 + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) + \dots$

Ea are raza de convergență $R = \min (R_1, R_2)$.

3. Dacă $\sum_0^{\infty} a_n x^n$ și $\sum_0^{\infty} b_n x^n$ au razele de convergență R_1 respectiv R_2 și suma seriei $\sum_0^{\infty} b_n x^n$ nu se anulează în $[a, b]$ numim *seria cît* a celor două serii de puteri, o serie de forma:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$$

ai cărei coeficienți se determină din condiția ca

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p.$$

Mulțimea de convergență a seriei cît este $(-R, R) \cap [a, b]$ cu $R = \min(R_1, R_2)$.

Exemple

1. Să se determine o dezvoltare în serie Mac Laurin pentru funcția $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Știm că $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ dezvoltare valabilă pentru $x \in \mathbb{R}$.

Căutăm pentru $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ o dezvoltare în serie de puteri de forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

astfel încît

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) \equiv 1$$

Obținem prin identificare sistemul infinit:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad -\frac{a_0}{2!} + a_2 = 0,$$

$$-\frac{a_1}{2!} + a_3 = 0, \quad \frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_4 = 0, \dots$$

de unde rezultă $a_{2k+1} = 0$ pentru orice k și

$$a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_4 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{5}{24}.$$

Astfel seria de puteri este

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{24} x^4 + \dots$$

și are mulțimea de convergență $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$.

2. Să se determine o dezvoltare în serie de puteri pentru funcția $f(x) = \ln(x+1)$, $x+1 > 0$.

Considerăm funcția

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x+1 > 0$$

pe care o dezvoltăm în serie de puteri după seria binomului generalizat $f'(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n + \dots$, $|x| < 1$.

Observăm că

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Îmbunătățirea convergenței seriilor de puteri prin metoda Euler-Abel

Să presupunem că o serie $\sum_0^\infty a_n x^n$ este convergentă către funcția $f(x)$ pentru $x \in (-R, R)$. Metoda Euler-Abel constă în a construi pornind de la aceasta o altă serie de puteri care să convergă către aceeași funcție însă convergența să fie mai rapidă.

Prezentăm în continuare metoda Euler-Abel.

Fie seria convergentă $\sum_0^\infty a_n x^n$ și $f(x)$ suma seriei pentru $|x| < R$. Presupunem $R = 1$. Putem scrie seria de puteri sub forma:

$$f(x) = a_0 + x\varphi(x)$$

$$\text{unde } \varphi(x) = \sum_1^\infty a_n x^{n-1} = \sum_0^\infty a_{n+1} x^n.$$

De aici

$$(1-x)\varphi(x) = \sum_0^\infty a_{n+1} x^n - \sum_0^\infty a_{n+1} x^{n+1}.$$

Dar:

$$\sum_0^\infty a_{n+1} x^{n+1} = \sum_1^\infty a_n x^n \text{ deci,}$$

$$(1-x)\varphi(x) = a_0 + \sum_0^\infty (a_{n+1} - a_n) x^n = a_0 + \sum_0^\infty \Delta a_n x^n$$

unde $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Rezultă:

$$\varphi(x) = \sum_0^\infty a_{n+1} x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{1}{1-x} \sum_0^\infty \Delta a_n x^n$$

și deci

$$f(x) = a_0 + \frac{a_0 x}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_0^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_0^{\infty} \Delta a_n x^n$$

sau

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_0^{\infty} \Delta a_n x^n.$$

Această transformare se numește transformarea Euler-Abel.

Aplicînd seriei $\sum_0^{\infty} \Delta a_n x^n$ o transformare asemănătoare obținem:

$$\sum_0^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x} \sum_0^{\infty} \Delta^2 a_n x^n$$

unde $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$ sînt diferențele de ordinul doi ai coeficienților a_n .

Ținînd seama de aceasta avem:

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x \Delta a_0}{(1-x)^2} + \left(\frac{x}{1-x} \right)^2 \sum_0^{\infty} \Delta^2 a_n x^n.$$

Aplicînd transformarea Euler-Abel de „p” ori obținem:

$$\sum_0^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x \Delta a_0}{(1-x)^2} + \dots + \frac{x^{p-1} \Delta^{p-1} a_0}{(1-x)^p} + \left(\frac{x}{1-x} \right)^p \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^p a_n x^n,$$

unde

$$\Delta^p a_n = \Delta^{p-1} a_{n+1} - \Delta^{p-1} a_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

sînt diferențele de ordin „p” ai coeficienților a_n . Deci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k a_0 \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1-x} \right)^p \sum \Delta^p a_n x^n$$

Transformarea este utilă atunci cînd ordinul de descreștere a diferențelor finite $\Delta^p a_n$ cînd $n \rightarrow \infty$ este mai mare decît a coeficienților a_n .

Dacă $a_n = p_k(n)$ (un polinom de grad „k”) atunci

$$(*) \sum_0^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^k \Delta^p a_0 \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}, \quad |x| < 1.$$

Exemplu

Să se determine suma seriei folosind (*)

$$\sum_0^{\infty} (n^2 + n + 2) x^n.$$

În acest caz $a_n = n^2 + n + 2$. Formăm tabloul diferențelor

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$
0	2	2	2
1	4	4	
2	8		

Din (*) deducem

$$S(x) = \frac{2}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Exerciții propuse

1) Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru următoarele șiruri de funcții:

$$f_n(x) = \arctg nx, \quad x \in [0, \infty)$$

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in [0, \infty)$$

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin nx, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

2) Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru seriile de funcții:

$$\sum_1^\infty \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n-1} (\operatorname{tg} x)^n \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2) \dots (1+x^n)}, \quad |x| < 1.$$

Indicație. În primele două cazuri se notează $x(1-x) = y$ și respectiv $\operatorname{tg} x = y$ și se reduc la serii de puteri. În al 3-lea caz se consideră seria modulelor și se aplică unul din criteriile de la serii cu termeni pozitivi.

3) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x , funcția $f(x) = \arcsin x$ și să se obțină din această dezvoltare numărul π cu 3 zecimale exacte.

Indicație: Se derivează funcția $f(x)$.

4) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcțiile

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x-2)}, \quad x \neq 0, \quad x \neq 2.$$

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \quad f(x) = \operatorname{tg} x.$$

5. Folosind dezvoltarea în serie de puteri pentru funcția $f(x) = \arcsin x$ să se calculeze suma seriei

$$\sum_1^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \dots (2n-1)^2}{(2n+2)! 2^{2n+2}}$$

(problemă dată la Concursul Traian Lalescu 1978).

6. Să se reprezinte funcția:

$$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^2$$

printr-o serie de puteri după puterile lui x .

7. Folosind dezvoltările în serii de puteri să se calculeze

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} - e^x \right) \frac{1}{x}.$$

CAPITOLUL V

INTEGRALE RIEMANN-STIELTJES

§ 1. DEFINIȚIA INTEGRALEI RIEMANN-STIELTJES.

Definiția 1.1. Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Numim o diviziune a intervalului $[a, b]$ orice mulțime finită și ordonată de forma:

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

Mulțimea tuturor diviziunilor lui $[a, b]$ o notăm prin $\mathfrak{D}([a, b])$.

Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$, g o funcție reală nedescrescătoare pe $[a, b]$ și f o funcție reală mărginită pe $[a, b]$.

Pentru fiecare

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\} \in \mathfrak{D}([a, b])$$

definim

$$s(f, g; \Delta) = \sum_{j=1}^n m_j(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

unde $m_j = \inf_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$

și

$$S(f, g; \Delta) = \sum_{j=1}^n M_j(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

cu $M_j = \sup_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$

și le numim sumele Darboux inferioară și superioară.

Dăm următoarea definiție a integralității:

Definiția 2.1. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\Delta \in \mathfrak{D}([a, b])$ astfel încât

$$S(f, g; \Delta) - s(f, g; \Delta) < \varepsilon$$

spunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$.

Definiția 3.1. O diviziune Δ^* , $\Delta \subset \Delta^* \in \mathfrak{D}([a, b])$ este mai fină decât diviziunea Δ dacă toate punctele diviziunii Δ sînt puncte de diviziune și pentru Δ^* .

Definiția 4.1. Pentru orice diviziune Δ punem

$$\mu(\Delta) = \max (x_i - x_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n$$

și numim $\mu(\Delta)$ diametrul diviziunii Δ .

Comportarea sumelor $s(f, g; \Delta)$ și $S(f, g; \Delta)$ cînd se trece de la o diviziune Δ la o diviziune mai fină este dată de

Propoziția 1.1. Dacă $\Delta \subset \Delta^*$ avem:

$$s(f, g; \Delta) \leq s(f, g; \Delta^*) \leq S(f, g; \Delta^*) \leq S(f, g; \Delta).$$

Demonstrație. Să arătăm că:

$$s(f, g; \Delta) \leq s(f, g; \Delta^*).$$

Vom presupune că Δ^* conține un singur punct mai mult decît Δ ; astfel dacă

$$\Delta^* = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < u < t_k < \dots < t_n = b\}$$

pentru un anumit k putem scrie:

$$\begin{aligned} s(f, g; \Delta^*) - s(f, g; \Delta) &= \\ &= \inf \{f(x), x \in [t_{k-1}, u]\} \cdot (g(u) - g(t_{k-1})) + \inf \{f(x), x \in [u, t_k]\} (g(t_k) - \\ &\quad - g(u)) - \inf \{f(x), x \in [t_{k-1}, t_k]\} (g(t_k) - g(t_{k-1})) = \\ &= (\inf \{f(x), x \in [t_{k-1}, u]\} - \inf \{f(x); x \in [t_{k-1}, t_k]\}) (g(u) - g(t_{k-1})) + \\ &\quad + (\inf \{f(x), x \in [u, t_k]\} - \inf \{f(x), x \in [t_{k-1}, t_k]\}) (g(t_k) - g(u)) \geq 0 \end{aligned}$$

deci

$$s(f, g, \Delta^*) \geq s(f, g, \Delta)$$

La fel se procedează pentru sumele S

Propoziția 2.1. Dacă Δ și Δ^* sînt 2 diviziuni din $\mathcal{D}([a, b])$ atunci $s(f, g, \Delta) \leq S(f, g, \Delta^*)$.

Demonstrație. Putem scrie că

$$s(f, g, \Delta) \leq s(f, g, \Delta \cup \Delta^*) \leq S(f, g, \Delta^*).$$

Teorema 1.1. Fie f integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$. Atunci există un singur număr real γ astfel ca:

$$s(f, g, \Delta) \leq \gamma < S(f, g, \Delta)$$

pentru orice $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ adică

$$\begin{aligned} \gamma &= \sup \{s(f, g; \Delta), \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\} = \\ &= \inf \{S(f, g; \Delta), \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\}. \end{aligned}$$

Acest număr γ se numește integrala Riemann-Stieltjes a funcției f în raport cu g pe $[a, b]$.

Notăm acest număr γ cu $\int_a^b f(x) dg(x)$.

În cazul $g(x) = x$, $x \in [a, b]$ numărul γ se numește integrala Riemann a lui f pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $\gamma = \sup \{s(f, g, \Delta), \Delta \in \mathfrak{D}([a, b])\}$ și $\delta = \inf \{S(f, g, \Delta), \Delta \in \mathfrak{D}([a, b])\}$

Din cele demonstrate mai sus rezultă

$$\gamma \leq \delta.$$

Mai trebuie arătat că $\gamma = \delta$. Să presupunem că $\gamma < \delta$. Deoarece $\delta - \gamma > 0$, definiția integrabilității arată că pentru $\varepsilon = (\delta - \gamma)/2$ există $\Delta \in \mathfrak{D}([a, b])$ astfel ca

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \delta &\leq S(f, g, \Delta) = (S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta)) + \\ &+ s(f, g, \Delta) < \frac{\delta - \gamma}{2} + \gamma = \frac{\delta + \gamma}{2} \text{ de unde } \delta \leq \gamma \end{aligned}$$

ceea ce arată o contradicție; deci $\gamma = \delta$.

Vom arăta că integrala Riemann-Stieltjes poate fi definită și cu ajutorul limitei unui șir de sume în care în locul lui M_i și m_i apar valori ale funcției f .

Pentru aceasta fie $\Delta \in \mathfrak{D}([a, b])$. Alegem punctele $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, arbitrare, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ și formăm sumele

$$\sigma(f, g, \Delta) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Observăm că $s(f, g, \Delta) < \sigma(f, g, \Delta) < S(f, g, \Delta)$ deoarece

$$m_i < f(\xi_i) < M_i$$

și

$$s(f, g, \Delta) = \min_{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]} \sigma(f, g, \Delta), \quad S(f, g, \Delta) = \max_{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]} \sigma(f, g, \Delta)$$

Are loc

Teorema 2.1. Dacă $\lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, g, \Delta)$ există, atunci f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și

$$\lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, g, \Delta) = \int_a^b f dg = \gamma.$$

Demonstrație. Să presupunem că

$$\lim_{\mu(\Delta) \rightarrow 0} \sigma(f, g, \Delta) = A.$$

De aici rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ ($\exists$) $\delta(\varepsilon)$ astfel încît pentru $\mu(\Delta) < \delta$ avem:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(f, g, \Delta) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă luăm în această inegalitate marginea inferioară și marginea superioară în raport cu toate valorile $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ obținem:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, g, \Delta) \leq S(f, g, \Delta) \leq A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici rezultă că

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon$$

deci f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și cum

$$s(f, g, \Delta) < \sigma(f, g, \Delta) < S(f, g, \Delta) \text{ și } s(f, g, \Delta) < \gamma < S(f, g, \Delta)$$

rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ și orice Δ ,

$$|\sigma(f, g, \Delta) - \gamma| < S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon.$$

Luînd în această egalitate limită în raport cu toate diviziunile Δ cu $\mu(\Delta) \rightarrow 0$ avem

$$|A - \gamma| < \varepsilon$$

ceea ce arată că $A = \gamma$.

Teorema 3.1. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ și g este crescătoare pe $[a, b]$ atunci f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.

Demonstrație. Deoarece $[a, b]$ este un compact funcția f este uniform continuă pe $[a, b]$.

Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a) + 1}, \quad x, y \in [a, b]$$

și $|x - y| < \delta(\varepsilon)$.

Alegem $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ astfel ca

$$t_j - t_{j-1} < \delta \text{ pentru } j = 1, 2, \dots, n.$$

Alegem $x_j, y_j \in [t_{j-1}, t_j]$ astfel ca:

$$0 \leq |f(x_j) - f(y_j)| \leq \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a) + 1}.$$

Avem de asemenea:

$$\begin{aligned} S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) &= \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(y_j)) (g(t_j) - g(t_{j-1})) < \\ < \sum_{j=1}^n \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a) + 1} (g(t_j) - g(t_{j-1})) = \frac{\varepsilon(g(b) - g(a))}{g(b) - g(a) + 1}. \end{aligned}$$

Observație. Deoarece $g(x) = x$ este o funcție crescătoare rezultă că o funcție continuă este întotdeauna integrabilă Riemann

Proprietăți ale integralei Riemann-Stieltjes

Teorema 4.1. Dacă f_1 și f_2 sînt Riemann-Stieltjes integrabile în raport cu g pe $[a, b]$ atunci de asemenea $f_1 + f_2$ este integrabilă și

$$\int (f_1 + f_2) dg = \int f_1 dg + \int f_2 dg.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ dat. Alegem Δ_j astfel ca

$$S(f_j, g, \Delta_j) - s(f_j, g, \Delta_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $j = 1, 2$ și fie $\Delta = \Delta_1 \subset \Delta_2$.

Ținînd seama că

$$\inf (f_1 + f_2) \geq \inf f_1 + \inf f_2$$

și

$$\sup (f_1 + f_2) \leq \sup f_1 + \sup f_2$$

putem scrie:

$$\begin{aligned} s(f_1, g, \Delta_1) + s(f_2, g, \Delta_2) &\leq s(f_1, g, \Delta) + s(f_2, g, \Delta) \leq \\ &\leq s(f_1 + f_2, g, \Delta) \leq S(f_1 + f_2, g, \Delta) \leq \\ &\leq S(f_1, g, \Delta_1) + S(f_2, g, \Delta_2) < s(f_1, g, \Delta_1) + \\ &\quad + s(f_2, g, \Delta_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Urmează că

$$S(f_1 + f_2, g, \Delta) - s(f_1 + f_2, g, \Delta) < \varepsilon$$

și deci $f_1 + f_2$ este integrabilă.

Fie

$$\int_a^b f_j dg = \gamma_j \text{ și } \Delta_j^* \text{ astfel ca:}$$

$$|s(f_j, g, \Delta_j^*) - \gamma_j| < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|S(f_j, g, \Delta_j^*) - \gamma_j| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Rezultă că $0 \leq S(f_j, g, \Delta_j^*) - s(f_j, g, \Delta_j^*) < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru $j = 1, 2$.

Punînd $\Delta^* = \Delta_1^* \cup \Delta_2^*$ avem:

$$\begin{aligned} s(f_1, g, \Delta_1^*) + s(f_2, g, \Delta_2^*) &\leq \\ &\leq s(f_1, g, \Delta_1^*) + s(f_2, g, \Delta_1^*) \leq \\ &\leq s(f_1 + f_2, g, \Delta^*) \leq S(f_1 + f_2, g, \Delta^*) \leq \\ &\leq S(f_1, g, \Delta_1^*) + S(f_2, g, \Delta_2^*) < \\ &< s(f_1, g, \Delta_1^*) + s(f_2, g, \Delta_2^*) + \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

de unde

$$s(f_1 + f_2, g, \Delta^*) - s(f_1, g, \Delta_1^*) - s(f_2, g, \Delta_2^*) < \frac{2\varepsilon}{3}$$

și

$$S(f_1, g, \Delta_1^*) + S(f_2, g, \Delta_2^*) - S(f_1 + f_2, g, \Delta^*) < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Din relațiile de mai sus rezultă:

$$|s(f_1 + f_2, g, \Delta^*) - (\gamma_1 + \gamma_2)| < \varepsilon$$

și

$$|S(f_1 + f_2, g, \Delta^*) - (\gamma_1 + \gamma_2)| < \varepsilon.$$

Teorema 5.1. Dacă f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și $c \in \mathbf{R}$ atunci cf este integrabilă și

$$\int_a^b cf \, dg = c \int_a^b f \, dg.$$

Teorema 6.1. Dacă f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și $f \geq 0$ atunci

$$\int_a^b f \, dg \geq 0.$$

Teorema 7.1. Fie f Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și fie $a < c < b$.

Atunci f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, c]$ și $[c, b]$ și

$$\int_a^b f \, dg = \int_a^c f \, dg + \int_c^b f \, dg.$$

Demonstrație. Fie $\varepsilon > 0$ dat. Să alegem $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ astfel încât

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon.$$

Să presupunem că $c \in \Delta$ și

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = c < t_{m+1} < \dots < t_n = b\}.$$

Fie

$$\Delta_1 = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = c\} \in \mathcal{D}([a, c])$$

$$\Delta_2 = \{c = t_m < \dots < t_n = b\} \in \mathcal{D}([c, b]).$$

Atunci

$$\begin{aligned} (S(f, g, \Delta_1) - s(f, g, \Delta_1)) + (S(f, g, \Delta_2) - s(f, g, \Delta_2)) &= \\ &= S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Rezultă că f este integrabilă pe $[a, c]$ și $[c, b]$.

Fie

$$\int_a^c f \, dg = \gamma_1 \text{ și } \int_c^b f \, dg = \gamma_2.$$

Putem scrie ținând seama de definiția lui γ_1 și γ_2 că:

$$0 \leq S(f, g, \Delta_1) - \gamma_1 < \varepsilon$$

și

$$0 \leq S(f, g, \Delta_2) - \gamma_2 < \varepsilon.$$

Adunând obținem:

$$0 \leq S(f, g, \Delta) - (\gamma_1 + \gamma_2) < 2\varepsilon.$$

Pentru s putem stabili o inegalitate asemănătoare deci

$$\int_a^b f dg = \gamma_1 + \gamma_2.$$

A 2-a proprietate de liniaritate a integralei Riemann-Stieltjes este dată în

Teorema 8.1. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ în raport cu g_1, g_2 atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ în raport cu funcția $g = \alpha g_1 + \beta g_2$ și

$$\int_a^b f dg = \alpha \int_a^b f dg_1 + \beta \int_a^b f dg_2.$$

Demonstrație. Cum f este integrabilă în raport cu g_1 pe $[a, b]$ pentru o diviziune oarecare avem:

$$\begin{aligned} S_1(f, g_1, \Delta) - s_1(f, g_1, \Delta) &= \\ &= \sum_1^n M_k(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})) - \sum_1^n m_k(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})) < \varepsilon \end{aligned}$$

(cu $m_k = \min f(t)$, și $M_k = \max f(t)$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$)

și la fel

$$\begin{aligned} S_2(f, g_2, \Delta) - s_2(f, g_2, \Delta) &= \\ &= \sum_1^n M_k(g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) - \sum_1^n m_k(g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Dar:

$$\begin{aligned} S(f, \alpha g_1 + \beta g_2, \Delta) - s(f, \alpha g_1 + \beta g_2, \Delta) &= \\ &= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) [\alpha g_1(t_k) + \beta g_2(t_k) - \alpha g_1(t_{k-1}) - \beta g_2(t_{k-1})] = \\ &= \alpha \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})) + \\ &+ \beta \sum_{k=1}^n (M_k - m_k) (g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Consecință. O funcție f continuă pe $[a, b]$ este integrabilă în raport cu o funcție cu variație mărginită.

Demonstrație. O funcție g cu variație mărginită se scrie conform teoremei de descompunere a lui Jordan ca diferență a 2 funcții monotone adică $g = g_1 - g_2$, g_1 și g_2 monotone.

Formula de integrare prin părți pentru integrala Stieltjes este dată de

Teorema 9.1. Dacă f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, atunci g este integrabilă în raport cu f pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b f dg = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b g df.$$

Demonstrație. Fie $a = x_0 = \xi_0 \leq x_1 \leq \xi_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{i-1} \leq \xi_{i-1} \leq x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1} \leq \xi_{i+1} \leq x_{i+2} \leq \dots \leq \xi_{n-1} = x_n = b$.

Presupunem că: $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n$

și $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_i < \xi_{i+1} < \dots < \xi_{n-1}$.

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$ și

$\Delta' = (a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_i < \xi_{i+1} < \dots < \xi_{n+1} = b)$.

Observăm că atunci când $\mu(\Delta) \rightarrow 0$ avem $\mu(\Delta') \rightarrow 0$ și reciproc. Avem:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(\xi_i, f, g) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) [g(x_{i+1}) - g(x_i)] = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g(x_i) = \\ &= f(b) g(b) - f(a) g(a) + \sum_{i=0}^{n-2} f(\xi_i) g(x_{i+1}) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) g(x_i) = f(b) g(b) - g(a) f(a) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i) [f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})], \end{aligned}$$

de unde rezultă luând un șir de diviziuni cu $\mu(\Delta) \rightarrow 0$ relația cerută.

Observație. Din această teoremă și din teorema 3 rezultă că o funcție crescătoare este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu o funcție continuă pe $[a, b]$.

Teorema 10.1. Fie f integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, $m \leq f \leq M$, φ continuă pe $[m, M]$ și $h(x) = \varphi(f(x))$ pe $[a, b]$. Atunci h este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$.

Demonstrație. Deoarece φ este continuă pe $[m, M]$ rezultă că ea este și uniform continuă deci $(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) \delta < \varepsilon$ astfel încît pentru orice $y_1, y_2 \in [m, M]$ cu $|y_1 - y_2| < \delta$,

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \varepsilon.$$

Cum f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ rezultă pentru $\varepsilon = \delta^2$ o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ a segmentului $[a, b]$ astfel ca:

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \delta^2.$$

Fie M_i^* și m_i^* marginile superioară și inferioară ale funcției h cînd $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Împărțim numerele $1, 2, \dots, n$ în 2 clase: $i \in A$ dacă $M_i - m_i < \delta$ și $i \in B$ dacă $M_i - m_i \geq \delta$.

Pentru $i \in A$, $M_i^* - m_i^* = \varphi(\xi_i) - \varphi(\eta_i) < \varepsilon \forall |\xi_i - \eta_i| < \delta(\varepsilon)$

Pentru $i \in B$, $M_i^* - m_i^* \leq 2K$ unde

$$K = \sup |\varphi(y)|, y \in [m, M].$$

Putem scrie deci că:

$$\delta \sum_{i \in B} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) < \delta^2$$

astfel că:

$$\sum_{i \in B} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) < \delta.$$

Deci:

$$\begin{aligned} S^*(f, g, \Delta) - s^*(f, g, \Delta) &= \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) + \\ &+ \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*) (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \leq \varepsilon(g(b) - g(a)) + 2K\varepsilon = \\ &= \varepsilon[g(b) - g(a) + 2K]. \end{aligned}$$

Observație. Din această teoremă rezultă următoarele clase de funcții integrabile Riemann

1) Dacă f este continuă pe $[a, b]$ există $\int_a^b f dx$.

2) Dacă f este monotonă și mărginită pe $[a, b]$ există $\int_a^b f dx$. Justificăm aceasta astfel:

1) Luînd în teorema 10.1, $\varphi = f$ continuă și $f = x$, $x \in [a, b]$, $g = x$, $x \in [a, b]$, rezultă că f este integrabilă în raport cu x adică există $\int_a^b f dx$.

2) Luînd x continuă și f monotonă atunci din observația teoremei 9.1. rezultă că $\int_a^b f dx$ există.

Alte proprietăți ale integralei Riemann-Stieltjes sînt date în:

Teorema 11.1. Dacă f_1 și f_2 sînt funcții integrabile în raport cu g pe $[a, b]$ atunci

- 1) $f_1 \cdot f_2$ este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.
- 2) $|f|$ este integrabilă în raport cu g și

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg.$$

Demonstrație. Punînd $\varphi(t) = t^2$ și aplicînd teorema precedentă rezultă că f^2 este integrabilă în raport cu g dacă f este integrabilă în raport cu g și din relația

$$4f_1 \cdot f_2 = (f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2$$

rezultă afirmația 1).

Pentru 2) luăm $\varphi(t) = |t|$ și aplicăm teorema precedentă; rezultă că $|f|$ este integrabilă în raport cu g dacă f este integrabilă în raport cu g .

Alegem $c = \pm 1$ astfel, încît $c \int_a^b f dg \geq 0$

Putem scrie

$$\left| \int_a^b f dg \right| = c \int_a^b f dg = \int_a^b c f dg \leq \int_a^b |f| dg$$

deoarece $cf \leq |f|$.

Funcții primitive

Fie $f(x)$ o funcție definită pe intervalul $[a, b]$.

Punem problema determinării unei funcții F în $[a, b]$ care să aibă proprietatea că

$$\frac{dF}{dx} = f(x), \quad x \in (a, b).$$

Funcția F se numește funcția primitivă a lui $f(x)$ în (a, b) .

Problema pusă trebuie să aibă în vedere existența unei asemenea funcții și unicitatea ei.

În legătură cu unicitatea primitivei observăm că dacă F_1 și F_2 sînt 2 primitive,

$$\frac{dF_1}{dx} = f(x), \quad \frac{dF_2}{dx} = f(x),$$

$$\frac{d(F_1 - F_2)}{dx} = 0 \quad \text{și deci } F_1 - F_2 = C,$$

C constantă numerică.

Fie f o funcție integrabilă în $[a, b]$. Funcția

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in (a, b)$$

se numește integrala nedefinită a funcției f în $[a, b]$.

În cele ce urmează ne vom ocupa de integrala Riemann nedefinită și vom justifica faptul că integrarea și diferențierea sînt operații inverse una alteia.

Are loc

Teorema 12.1. Fie f integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Pentru $a \leq x \leq b$ punem

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

atunci

- 1) Funcția F este continuă pe $[a, b]$.
- 2) Dacă funcția f este continuă în punctul $x_0 \in [a, b]$, atunci F este diferențiabilă în punctul x_0 și

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demonstrație. 1) Funcția f este mărginită deoarece este integrabilă pe $[a, b]$ deci $(\exists) M > 0$ astfel ca

$$|f(t)| < M, \quad t \in [a, b].$$

Pentru $a \leq x \leq y \leq b$ scriem:

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t) dt \right| \leq M(y - x).$$

Dar: $M |y - x| < \varepsilon$ cînd $|y - x| < \frac{\varepsilon}{M}$

și atunci $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ ceea ce arată că F este continuă în punctul x .

2) f este continuă în x_0 deci $(\forall) \varepsilon > 0 (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dacă $|t - x_0| < \delta$ și $a \leq t \leq b$; atunci

$$\left| \frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{t - x_0} \int_{x_0}^t [f(u) - f(x_0)] du \right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că: $F'(x_0) = f(x_0)$.

De aici rezultă și

Teorema 13.1. Dacă f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și există F pe $[a, b]$ astfel încît $F' = f$ atunci

$$\int_a^b f dx = F(b) - F(a),$$

(formula lui Leibniz-Newton).

Demonstrație. Pentru o diviziune Δ a segmentului $[a, b]$ alegem ξ_i , ($i = 1, \dots, n$) astfel încît $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ și

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i).$$

(Această rezultă din aplicarea teoremei creșterilor finite)

Atunci

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$$

și această sumă tinde la $\int_a^b f dx$ cînd $\mu(\Delta) \rightarrow 0$.

Formula lui Leibniz-Newton este utilă în aplicații deoarece reduce calculul unei integrale definite la determinarea unei primitive pentru funcția de sub integrală.

Exemple:

$$1) \int_0^\pi \sin^4 x dx = \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int_0^\pi \frac{3 - 4 \cos 2x + \cos 4x}{8} dx = \\ = \frac{1}{8} \left(3x - 2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 4x \right) \Big|_0^\pi = \frac{3\pi}{8}.$$

2) Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 3,

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \alpha \frac{x^4}{4} \Big|_a^b + \frac{\beta}{3} x^3 \Big|_a^b + \frac{\gamma}{2} x^2 \Big|_a^b + \delta(b - a) = \\ = \frac{1}{12} [3\alpha(b^4 - a^4) + 4\beta(b^3 - a^3) + 6\gamma(b^2 - a^2) + 12\delta(b - a)] = \\ = \frac{b - a}{12} [3\alpha(b^3 + b^2a + ba^2 + a^3) + 4\beta(b^2 + ab + b^2) + \\ + 6\gamma(b + a) + 12\delta] = \frac{b - a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

care se numește formula celor 3 nivele.

Posibilitatea reducerii unei integrale Riemann-Stieltjes la o integrală Riemann este dată în

Teorema 14.1. Dacă f este integrabilă Riemann în raport cu g pe $[a, b]$, g' este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann în raport cu x pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b f dg = \int_a^b fg' dx.$$

Demonstrație. Observăm că fg' este integrabilă Riemann (teorema 11.1). Cum fg' și g' sînt integrabile Riemann rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ astfel încît:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b fg' dx \right| < \varepsilon$$

cînd $\mu(\Delta) < \delta$ și

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g' dx \right| < \varepsilon$$

cînd $\mu(\Delta) < \delta_2$ și $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$.

Alegem Δ astfel ca $\mu(\Delta) \leq \delta_1$, $\mu(\Delta) \leq \delta_2$ și $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

Putem scrie

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) &= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) + \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g'(\xi_i^*) - g'(\xi_i)](x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

ξ_i^* au fost introduse prin aplicarea formulei creșterilor finite funcției g pe $[x_{i-1}, x_i]$ și $\xi_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$.

Dar,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)[g'(\xi_i^*) - g'(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) \right| &\leq M \left| \sum_{i=0}^{n-1} [g'(\xi_i^*) - g'(\xi_i)] \times \right. \\ &\times (x_i - x_{i-1}) \left| \leq M \left(\left| \sum_{i=0}^{n-1} g'(\xi_i^*)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g' dx \right| + \right. \right. \\ &\left. \left. + \left| \sum_{i=0}^{n-1} g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g' dx \right| \right) \leq 2M\varepsilon. \end{aligned}$$

Rezultă că sumele

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \text{ și } \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

converg către aceeași limită.

Exemplu: Să se calculeze $\int_0^1 f dg$ dacă

$$g = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1-x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad f = x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Observăm că g este cu variație mărginită deoarece $g = g_1 + g_2$, g_1 monotonă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, g_2 monotonă pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ iar f este continuă

$$g_1 = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}; \quad g_2 = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}.$$

g nu este derivabilă pe $[0, 1]$ dar f este derivabilă, și pentru a calcula integrala aplicăm formula de integrare prin părți

$$\begin{aligned} \int_0^1 f dg &= fg \Big|_0^1 - \int_0^1 g df = - \int_0^1 g f' dx = \\ &= -2 \int_0^1 g x dx = -2 \left[\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)x dx \right] = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Din teorema 9.1 obținem:

Formula de integrare prin părți pentru o integrală Riemann. Pentru acesta vom lua

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad G(x) = \int_a^x g(t) dt.$$

Din teorema 9.1 rezultă formula

$$\int_a^b F(x) dG(x) = F(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x) dF(x)$$

cu $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ care se mai poate scrie sub forma:

$$\int_a^b F(x) G'(x) dx = F(x) G(x) \Big|_a^b - \int_a^b G(x) F'(x) dx.$$

În legătură cu posibilitatea schimbării variabilei în integrala Riemann are loc

Teorema 15.1. Fie f și φ continue pe $[a, b]$, φ strict crescătoare pe $[a, b]$ și ψ funcția inversă a lui φ . Atunci

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y)) d\psi(y).$$

Demonstrație. Pentru o diviziune Δ oarecare

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$$

punem $y_i = \varphi(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ și considerăm diviziunea

$$\Delta': \varphi(a) = y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_{n-1} \leq y_n = \varphi(b).$$

Punînd $g(y) = f(\psi(y))$ obținem

$$\sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n g(y_i)[\psi(y_i) - \psi(y_{i-1})].$$

Deoarece φ este continuă pe $[a, b]$, φ este și uniform continuă pe $[a, b]$ și deci dacă $\mu(\Delta) \rightarrow 0$ atunci și $\mu(\Delta') \rightarrow 0$ și pentru $\mu(\Delta) \rightarrow 0$ obținem egalitatea din enunț.

Formule de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes sînt date de

Teorema 16.1. (Prima formulă de medie). Dacă f este continuă pe $[a, b]$ iar g este monoton crescătoare pe $[a, b]$ atunci există ξ astfel ca $a \leq \xi \leq b$ și

$$\int_a^b f dg = f(\xi)[g(b) - g(a)].$$

Demonstrație: Să punem

$$M = \sup f(t), \quad m = \inf f(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Atunci:

$$m[g(b) - g(a)] \leq \int_a^b f dg \leq M[g(b) - g(a)].$$

Din teorema lui Darboux pentru funcții continue există $a \leq \xi \leq b$ astfel încît

$$\int_a^b f dg = \lambda[g(b) - g(a)] = f(\xi)[g(b) - g(a)].$$

Teorema 17.1. (a 2-a formulă de medie). Dacă f este monotonă și g este cu variație mărginită și continuă pe $[a, b]$ există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f dg = f(a)[g(\xi) - g(a)] + f(b)[g(b) - g(\xi)].$$

Demonstrație: Din formula de integrare prin părți și prima formulă de medie obținem

$$\begin{aligned} \int_a^b f dg &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g df = \\ &= f(b)g(b) - f(a)g(a) - g(\xi)(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

pentru $\xi \in [a, b]$.

Exemple. Fie $f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2 dt$. Să se arate că

$$|f(x)| < 1/2x, \quad x > 0.$$

Facem schimbarea la variabilă $t^2 = u$, $t = \sqrt{u}$,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{u}} du \text{ și obținem}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x+1}} \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du.$$

Dacă notăm $\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ și $\beta(u) = \sin u$ observăm că $\alpha(u)$ este o funcție monotonă iar $\beta(u)$ este o funcție cu variație mărginită continuă, deci putem aplica a 2-a formulă de medie

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\sqrt{x}} (\sin \xi - \sin \sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x+1}} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \xi) \right| < \\ &< \frac{1}{2} \left(\frac{|\sin \xi - \sin \sqrt{x}|}{\sqrt{x}} + \frac{|\sin \sqrt{x+1} - \sin \xi|}{\sqrt{x+1}} \right) < \\ &< \frac{1}{2\sqrt{x}} (|\sin \xi - \sin \sqrt{x}| + |\sin \sqrt{x+1} - \sin \xi|) \end{aligned}$$

cu $\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x+1}$.

Mai departe

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &< \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left| \sin \frac{\xi - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\xi + \sqrt{x}}{2} \right| + \left| \sin \frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \xi}{2} \right| \right) < \\ &< \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\left| \sin \frac{\xi - \sqrt{x}}{2} \right| + \left| \sin \frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2} \right| \right) < \\ &< \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sin \frac{\xi - \sqrt{x}}{2} + \sin \frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2} \right) < \\ &< \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right) < \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2x}. \end{aligned}$$

Metode de calcul pentru integrala Riemann

Integrala funcțiilor raționale. Pentru a discuta integrarea funcțiilor raționale de forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

unde $P(x)$ și $Q(x)$ sînt polinoame în $\mathbf{R}$ trebuie să ne ocupăm de posibilitatea descompunerii în elemente simple a funcțiilor raționale.

Vom considera grad $P(x) < \text{grad } Q(x)$.

(În cazul în care nu este îndeplinită această condiție facem împărțirea celor două polinoame).

Definiția 5.1. Numim elemente simple funcțiile raționale $\frac{A}{(x-a)^n}$ și $\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]^n}$ când rădăcinile numitorului sînt numerele complexe $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$.

Vom demonstra că funcția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cu grad $P(x) < \text{grad } Q(x)$ admite o descompunere în elemente simple unică

Caz. I. ecuația $Q(x) = 0$ are rădăcina reală $x = a$ de ordin de multiplicitate m .

Vom scrie $Q(x) \equiv (x-a)^m Q_1(x)$ cu $Q_1(a) \neq 0$.

Pentru orice A_1 , A_1 real putem scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{P(x) - A_1 Q_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}.$$

Vom determina pe A_1 astfel încît polinomul $P(x) - A_1 Q_1(x)$ este divizibil cu $x-a$ adică

$$P(a) - A_1 Q_1(a) = 0$$

$$\text{de unde } A_1 = \frac{P(a)}{Q_1(a)}$$

Pentru această valoare a lui A_1 se poate scrie:

$$P(x) - A_1 Q_1(x) = (x-a) P_1(x)$$

și deci:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1} Q_1(x)}.$$

Urmărind același procedeu pentru fracția $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1} Q_1(x)}$ obținem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-a)^{m-2} Q_1(x)}$$

și în cele din urmă

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \frac{A_2}{(x-a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

Calculul coeficienților A_k se face prin indentificare sau prin următoarea metodă.

Dacă $Q(x)$ are toate rădăcinile simple și reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ avem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{x-a_k}$$

și, înmulțind cu $x - a_k$ obținem

$$A_k = \lim_{x \rightarrow a_k} \frac{(x - a_k) P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow a_k} \frac{(x - a_k) P'(x) + P(x)}{Q'(x)} = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}.$$

și, înlocuind în dezvoltarea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ obținem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x - a_k}$$

relație care se numește *formula de interpolare a lui Lagrange*.

În cazul în care polinomul $Q(x)$ are rădăcini multiple reale putem scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_m}{(x - a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x - a)^{m-1}} + \dots + \frac{A_1}{x - a} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

Coeficienții A_k se calculează prin indentificare sau astfel:

Înmulțim identitatea cu $(x - a)^m$ și facem $x = a$ pentru calculul lui A_m ; Avem:

$$A_m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^m P(x)}{Q(x)}.$$

Pentru a calcula A_{m-k} înmulțim cu $(x - a)^m$ derivăm apoi în raport cu x de k ori ($k \leq m - 1$) și facem $x \rightarrow a$; rezultă

$$A_{m-k} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{k!} \left[\frac{P(x) (x - a)^m}{Q(x)} \right]^{(k)}.$$

Exemplu: Funcția $f(x) = \frac{1}{(x - 1)^2 (x + 1)}$, $x \in \mathbf{R} - \{-1, 1\}$ admite o descompunere de formă

$$f(x) = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{x + 1}.$$

Calculăm

$$A_3 = \lim_{x \rightarrow -1} (x + 1) \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)^2 f(x)]' = \lim_{x \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{(x + 1)^2} \right) = -\frac{1}{4}.$$

Caz. II. Ecuația $Q(x) = 0$ are rădăcina $x = a + ib$ de ordin de multiplicitate m .

Polinomul $Q(x)$ va avea și pe $\bar{x} = a - ib$ rădăcină de același ordin de multiplicitate deci,

$$Q(x) \equiv [(x - a)^2 + b^2]^m Q_1(x).$$

Pornim de la identitatea:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{Ax + B}{[(x-a)^2 + b^2]^m} + \frac{P(x) - (Ax + B) Q_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^m S_1(x)}$$

adevărată oricare ar fi A și B pe care le determinăm astfel ca polinomul

$$P(x) - (Ax + B) Q_1(x)$$

să fie divizibil cu $(x - a - ib)(x - a + ib)$.

Cu a și b astfel determinați se poate scrie:

$$P(x) - (Ax + B) Q_1(x) \equiv [(x-a)^2 + b^2] P_1(x)$$

unde $P_1(x)$ este unic

Mai departe vom scrie:

$$\frac{P_1(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1} Q_1(x)} = \frac{Cx + D}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1}} + \frac{P_2(x)}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-2} Q_1(x)}$$

și în general

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_m + xB_m}{[(x-a)^2 + b^2]^m} + \frac{A_{m-1} + xB_{m-1}}{[(x-a)^2 + b^2]^{m-1}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_1 + xB_1}{(x-a)^2 + b^2} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)} \end{aligned}$$

Coeficienții A_k , B_k se determină prin identificare.

Example: 1. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ se calculează stabilind o relație de recurență între I_n și I_{n+1} .

Aplicînd formula de integrare prin părți cu

$$u(x) = (x^2 + a^2)^{-n} \text{ și } dv = dx$$

$$u'(x) = -2nx(x^2 + a^2)^{-n-1}, v = x$$

obținem:

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

sau

$$I_n = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1})$$

sau încă

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} a^2 I_n + \frac{x}{2na^2(x^2 + a^2)^n}$$

Tipuri de integrale reductibile la integrale din funcții raționale

I. Integralele de formă $\int R(\sin x, \cos x) dx$ se pot reduce la integrale raționale astfel

1) dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ se face schimbarea $\sin x = t$.

2) dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ se face schimbarea $\cos x = t$.

3) dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ se face schimbarea $\operatorname{tg} x = t$.

4) în celelalte cazuri se face schimbarea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

Exemplu: Să se calculeze $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x - 5}$.

Vom face schimbarea

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, dar deoarece când $x \in [0, 2\pi]$, $\frac{x}{2} \in [0, \pi]$ și tangenta este dis-

continuuă în $\frac{\pi}{2}$ vom scrie

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x - 5} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sin x + \cos x - 5} =$$

relație adevărată deoarece $f(x + 2\pi) = f(x)$,

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x - 5} \text{ și } \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

oricare ar fi α .

$$\begin{aligned} I &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)(3t^2-t+2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+1} dt + \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+2}{3t^2-t+2} dt = 2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6t-1+5}{3t^2-t+2} dt = \pi - \frac{1}{2} \ln(3t^2-t+2) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \\ &\quad - \frac{5}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} = \pi - \frac{5}{2\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}} \pi = \\ &\quad = \pi \left(1 - \frac{5}{\sqrt{23}}\right). \end{aligned}$$

II. Integralele de forma $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ se reduc la integrale din funcții raționale în următoarele cazuri.

1) dacă $a > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} \pm t$

2) dacă $a < 0$; $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c}$

3) dacă $b^2 - 4ac > 0$ fie x_0 o rădăcină reală a ecuației $ax^2 + bx + c = 0$; schimbarea de variabilă care se face este dată de

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0).$$

Să arătăm de exemplu valabilitatea schimbării de variabilă 2)

Ridicând la pătrat $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + c \pm 2xt\sqrt{c}$ de unde:

$$x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2(\pm\sqrt{c}a - tb \pm t^2\sqrt{c})}{(t^2 - a)^2} dt$$

și astfel

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx \rightarrow \\ & \rightarrow 2 \int R\left(\frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}, \frac{-t^2\sqrt{c} \mp a\sqrt{c} + bt}{t^2 - a}\right) \cdot \frac{\mp\sqrt{c}a - tb \pm t^2\sqrt{c}}{(t^2 - a)^2} dt \end{aligned}$$

iar integrala obținută este o integrală dintr-o funcție rațională.

În același mod se stabilește și valabilitatea celorlalte transformări

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 6}}$

Sintem în cazul 3) și facem schimbarea de variabilă

$$\sqrt{-x^2 + x + 6} = t(x + 2)$$

de unde

$$\sqrt{-\frac{(x-3)}{x+2}} = t, \quad \frac{-x+3}{x+2} = t^2$$

$$x = \frac{3 - 2t^2}{t^2 + 1}, \quad dx = \frac{-4t dt}{(t^2 + 1)^2},$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + x + 6}} &= -2 \int_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} \frac{dt}{t^2 + 1} = -2 \operatorname{arctg} t \Big|_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \\ &= 2 \left(\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2}{3}} \right) = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

III 1) Integrala de forma $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$ se transformă prin schimbarea $x = a \operatorname{ch} t$.
Obținem

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx \rightarrow a \int R(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t) \operatorname{sh} t dt.$$

2) Integrala de forma $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ se transformă prin schimbarea $x = a \sin t$, $dx = a \cos t dt$.
Obținem

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx \rightarrow a \int R(a \sin t, a \cos t) \cos t dt$$

3) Integralele de forma $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ se pot transforma prin schimbarea

$$x = a \operatorname{sh} t, dx = a \operatorname{ch} t dt.$$

Obținem

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx \rightarrow a \int R(a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t) \operatorname{ch} t dt.$$

IV. Integralele de forma:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}} dx\right)$$

se transformă prin substituția:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$$

unde r este cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi $n_1, n_2, \dots, n_p$.

Deci această transformare obținem:

$$x = \frac{t^r d - b}{a - ct^r}, dx = \frac{r(ad - bc) t^{r-1}}{(a - ct^r)^2} dt$$

și integrala devine:

$$\int R\left(\frac{dt^r - b}{a - ct^r}, t^{s_1}, \dots, t^{s_p}\right) \frac{r(ad - bc)}{(a - ct^r)^2} t^{r-1} dt$$

V. Integralele binome de forma

$$\int x^\alpha (ax^\beta + b)^\gamma dx, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$$

se transformă în integrale de funcții raționale în următoarele cazuri

1) dacă $\frac{\alpha+1}{\beta} = n$, n întreg

se face schimbarea: $ax^\beta + b = t^r$, unde $\gamma = \frac{p}{r}$, $\lambda = \frac{1}{1+\beta}$

Obținem $x = (t^r - b)^{\frac{1}{\beta}} a^{-\frac{1}{\beta}}$,

$$dx = \frac{ra^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta} t^{r-1} (t^r - b)^{\frac{1}{\beta}-1} dt$$

și integrala se transformă în:

$$\frac{r}{\beta} a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int t^{p+r-1} (t^r - b)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} dt$$

2) dacă $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = n$ întreg se face schimbarea $ax^\beta + b = t^r x^\beta$, $\lambda = \frac{1}{1+\beta}$

Obținem:

$$x = b^{\frac{1}{\beta}} (t^r - a)^{-\frac{1}{\beta}}, dx = -\frac{b^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} r t^{r-1} (t^r - a)^{-\frac{1}{\beta}-1} dt$$

și deci:

$$-\frac{b^{\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma}}{\beta} r \int t^{p+r-1} (t^r - a)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}-\gamma-1} dt$$

Exemple

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1+x^{\frac{1}{3}}}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} (1+x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}} dx.$$

Aici este cazul

$$\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = 4 \in \mathbb{N}$$

și deci schimbarea care se face este:

$$1 + x^{\frac{1}{3}} = t^2 x^{\frac{1}{3}}; x = (t^2 - 1)^{-3}, t \in [1, \sqrt{2}].$$

$$dx = -6t(t^2 - 1)^{-4} dt.$$

Obținem integrala

$$-6 \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1)^{-5} dt = 6 \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(1 - t^2)^5}$$

Integrale eliptice

În cazul în care polinomul $P(x)$ este de grad $n > 2$, integrala

$$\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$$

nu se exprimă în general prin funcții elementare.

Integralele de acest tip se pun sub una din următoarele forme:

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

sau

$$E(k, \theta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Pentru $k = 0$, $E(0, \theta) = F(0, \theta) = \theta$. Pentru $k = 1$, cele 2 integrale se exprimă prin funcții elementare:

$$F(1, \theta) = \int_0^{\sin \theta} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$E(1, \theta) = \int_0^{\sin \theta} dt = \sin \theta.$$

Funcțiile F și E se numesc *funcții eliptice* și ele se găsesc calculate în tabele pentru diferitele valori ale lui k și θ . Mai sînt unele integrale care nu se pot exprima prin funcții elementare. Acestea sînt:

$$\int \frac{\sin x}{x} dx \text{ (sinus integral); } \int \frac{\cos x}{x} dx \text{ (cosinus integral).}$$

$$\int \frac{e^x}{x} dx \text{ (exponențial integral)}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ (logaritm integral)}$$

Integrarea termen cu termen a unui șir de funcții

În capitolul IV am studiat proprietăți privind continuitatea și derivabilitatea unui șir de funcții. Continuăm cu studiul posibilității de integrare a unui șir de funcții.

Teorema 18.1. Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții continue definite pe $[a, b]$. Dacă șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este uniform convergent pe $[a, b]$ către funcția f ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Demonstrație. $f_n \xrightarrow{u.c.} f$ pe $[a, b]$; deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$.

Funcțiile f_n și f sînt continue și deci integrabile. Putem scrie

$$\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f_n - f| dx < \varepsilon(b-a) \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon).$$

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $f_n(x) = nx e^{-nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$ este convergent pentru $x \in [0, 1]$ către funcția $f(x) \equiv 0$. Convergența nu este însă uniformă. Teorema nu se aplică.

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-n})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dacă aplicăm această teoremă pentru șirul sumelor parțiale asociat unei serii de funcții $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ cu

$$f_n(x) : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ obținem}$$

Teorema 19.1. Dacă seria de funcții $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ este uniform convergentă către funcția f pe $[a, b]$ și dacă funcțiile f_n sînt continue pe $[a, b]$ atunci

$$\int_a^b f_1 dx + \int_a^b f_2 dx + \dots + \int_a^b f_n dx + \dots = \int_a^b f dx.$$

În cazul particular în care seria de funcții este o serie de puteri

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

are loc

Teorema 20.1. O serie de puteri poate fi integrată termen cu termen în intervalul de convergență.

Exemple.

1. Pentru a calcula $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ considerăm funcția $f(x) = (1+x^4)^{-\frac{1}{2}}$, pe

care o dezvoltăm în serie de puteri pentru $|x| > 1$.

Avem

$$\begin{aligned} (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{x^2} \left(1 + \frac{1}{x^4} \right)^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{x^2} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{x^8} + \dots (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n \cdot n!} \frac{1}{x^{4n}} + \dots \right) \end{aligned}$$

Integrăm această serie de puteri ale lui $\frac{1}{x}$ termen cu termen și obținem

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^6} + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{x^{4n+2}} + \dots \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!! (4n+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{4n+1}} \right).\end{aligned}$$

2. La fel pentru calculul integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x} \, dx$$

dezvoltăm în serie de puteri ale lui $\sin x$, funcția $f(x) = \sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x}$ dezvoltare valabilă pentru $|\sin x| < \sqrt{5}$.

Avem

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x} &= (1 - 0,2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} = \\ &= 1 - \frac{1}{10} \sin^2 x - \frac{0,2^2 \sin^4 x}{4 \cdot 2!} - \dots - \frac{(2n-3)!! \cdot 0,2^n}{2^n n!} \sin^{2n} x - \dots\end{aligned}$$

și integrând

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 2 \sin^2 x} \, dx &= \frac{\pi}{2} - \frac{(2n-3)!!}{10^n n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{(2n-3)!! (2n-1)!!}{10^n \cdot n! (2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2 \frac{1}{5^n \cdot (2n-1)} \right)\end{aligned}$$

§2. APLICAȚII GEOMETRICE ȘI MECANICE ALE INTEGRALEI

Integrala Riemann are aplicații în calculul ariilor domeniilor plane.

Pentru început să vedem ce înțelegem prin aria unei mulțimi plane. Pentru a lămurii aceasta vom pleca de la aria poligoanelor. Aria unui poligon are proprietățile următoare bine cunoscute:

1. Dacă $P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$ unde P_i sînt poligoane disjuncte două cîte două atunci

$$\text{aria } P = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 + \dots + \text{aria } P_n.$$

2. Dacă $P = P_2 - P_1$, $P_1 \subset P_2$ atunci

$$\text{aria } P = \text{aria } P_2 - \text{aria } P_1$$

Prin definiție aria unui punct, a unui segment de dreaptă și a unei linii poligonale este nulă.

Vom folosi aceste cunoștințe pentru a extinde aria poligoanelor la o clasă mai largă de mulțimi pe care le vom numi mulțimi măsurabile Jordan.

Fie A o mulțime plană mărginită. Vom considera toate poligoanele P interioare mulțimii A și toate poligoanele Q exterioare mulțimii A . Deoarece $P \subset A \subset Q$ notăm

$$a_i(A) = \sup_{P \subset A} (\text{aria } P)$$

și

$$a_e(A) = \inf_{Q \supset A} (\text{aria } Q).$$

Numerele $a_i(A)$ și $a_e(A)$ se numesc: *aria interioară* și respectiv *aria exterioară* (în sensul lui Jordan) a mulțimii A .

Definiția 1.2. Mulțimea mărginită A are arie (sau este măsurabilă în sensul lui Jordan) dacă $a_i(A) = a_e(A)$.

Notăm $a(A) = a_i(A) = a_e(A)$.

Vom da următorul criteriu de măsurabilitate.

Teorema 1.2. O mulțime A este măsurabilă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un poligon interior $P_\varepsilon \subset A$ și un poligon exterior $Q_\varepsilon \supset A$ astfel ca

$$\text{aria } a(Q_\varepsilon) - \text{aria } a(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demonstrație. Presupunem A măsurabilă; deci

$$\text{aria } A = \sup_{P \subset A} (\text{aria } P) = \inf_{Q \supset A} (\text{aria } Q)$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există două poligoane $P_\varepsilon \subset A$ și $Q_\varepsilon \supset A$ astfel încît:

$$\text{aria } A < \text{aria } (P_\varepsilon) + \varepsilon$$

$$\text{aria } (Q_\varepsilon) < \text{aria } A + \varepsilon.$$

Din acestea rezultă $\text{aria } Q_\varepsilon - \text{aria } P_\varepsilon < \varepsilon$. Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există două poligoane P_ε și Q_ε astfel încît $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ și $\text{aria } Q_\varepsilon - \text{aria } P_\varepsilon < \varepsilon$ și arătăm că A este măsurabilă.

Din inegalitățile:

$$\text{aria } (P_\varepsilon) \leq a_i(A) \leq a_e(A) < \text{aria } (Q_\varepsilon)$$

rezultă

$$a_e(A) - a_i(A) \leq \text{aria } (Q_\varepsilon) - \text{aria } (P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

și, cum ε este arbitrar, $a_e(A) = a_i(A)$, deci A este măsurabilă.

Calculul ariei unui domeniu plan

Fie $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ și domeniul D mărginit de graficul funcției, de axa Ox și de paralele prin a și b la axa Oy (fig. 16). Pentru a determina aria acestui domeniu plan, considerăm o diviziune:

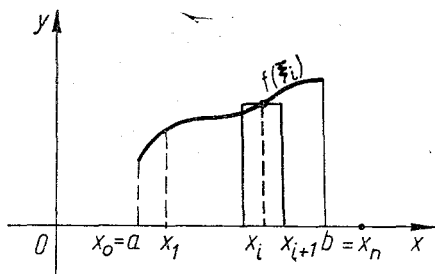


Fig. 16

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ și punctele arbitrare $M_i(\xi_i)$, $\xi_i \in (x_i, x_{i+1}]$.

Aria corespunzătoare intervalului $(x_i, x_{i+1}]$ o aproximăm prin aria dreptunghiului.

$$[x_i, x_{i+1}] \times f(\xi_i).$$

Însumînd, obținem:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Aceasta este o sumă Riemann care pentru un șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $v(\Delta_n) \rightarrow 0$, va tinde către

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Observație. Dacă $f(x) \leq 0$, $x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f(x) dx$ reprezintă aria domeniului considerat mai sus, cu semnul minus în față.

Putem spune deci că dacă $f(x)$ schimbă semnul pe $[a, b]$ aria domeniului mărginit de graficul lui f , de $[a, b]$ și de dreptele $x = a$, $x = b$ este dată de:

$$A = \int_a^b |f(x)| dx.$$

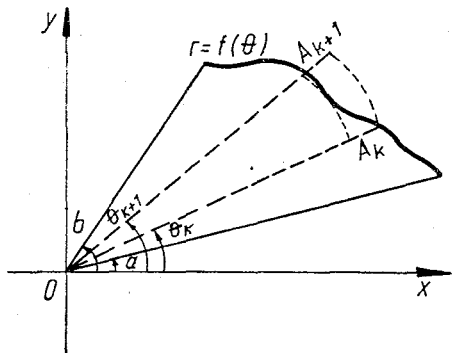


Fig. 17

Aria unui domeniu plan mărginit de o curbă dată în coordonate polare

Fie $r = f(\theta)$, $\theta \in [a, b]$ ecuația în coordonate polare a unui arc de curbă. Vrem să calculăm aria domeniului plan din figura 17.

Fie Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$a = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = b.$$

$$m_k = \inf_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f(\theta) \text{ și } M_k = \sup_{\theta \in [\theta_k, \theta_{k+1}]} f(\theta).$$

Considerăm sumele Darboux:

$$s_\Delta = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 (\theta_{k+1} - \theta_k) \text{ și } S_\Delta = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 (\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Din figura 17 se vede că aria căutată A îndeplinește inegalitățile:

$$s_{\Delta} \leq \mathcal{A} \leq S_{\Delta}.$$

Dacă $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir de diviziuni cu $v(\Delta_n) \rightarrow 0$ și $f^2(\theta)$ este integrabilă atunci șirurile (s_{Δ_n}) și (S_{Δ_n}) au o limită comună care este tocmai valoarea ariei căutate

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(\theta) d\theta.$$

Aria unei suprafețe de rotație

Fie $y = f(x)$, f continuă cu f' continuă pe $[a, b]$. Presupunem de asemenea că $f > 0$ pe $[a, b]$.

Ne interesează să determinăm aria $\mathcal{A}$ a suprafeței generată prin rotația arcului AB în jurul axei Ox (figura 18).

Fie Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Aproximăm aria suprafeței obținută de rotația arcului $\overline{M_k M_{k+1}}$ în jurul axei Ox prin aria laterală a trunchiului de con obținut prin rotația segmentului $\overline{M_k M_{k+1}}$ în jurul axei Ox .

Acest trunchi de con are aria laterală:

$$\omega_k = 2\pi \frac{y_k + y_{k+1}}{2} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

Cum

$$y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k), \quad \xi_k \in [x_k, x_{k+1}],$$

urmează că:

$$\begin{aligned} \omega_k &= 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \times \\ &\times \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} (x_{k+1} - x_k) \end{aligned}$$

și aria A este

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \times \\ &\times \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Arătăm că A_{Δ} și S_{Δ} , unde

$$S_{\Delta} = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} (x_{k+1} - x_k)$$

converg către aceeași limită pentru un șir de diviziune $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu $v(\Delta_n) \rightarrow 0$.

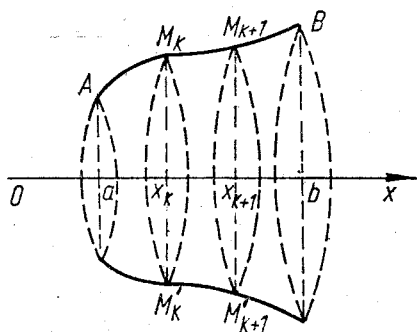


Fig. 18

$$\begin{aligned} \text{Avem } |A_{\Delta} - S_{\Delta}| &= 2\pi \left| \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) - f(\xi_k) + f(x_{k+1}) - f(\xi_k)}{2} \cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} (x_{k+1} - x_k) \right| \leq \\ &\leq 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f(x_k) - f(\xi_k)| + |f(x_{k+1}) - f(\xi_k)|}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k). \end{aligned}$$

Funcția $f(x)$ fiind continuă este și uniform continuă și deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ cînd } |x' - x''| < \eta(\varepsilon).$$

Dacă alegem $v(\Delta)$ astfel încît $v(\Delta) < \eta(\varepsilon)$,

$$|x_k - \xi_k| < \eta(\varepsilon) \text{ și } |x_{k+1} - \xi_k| < \eta(\varepsilon)$$

putem scrie $|A_{\Delta} - S_{\Delta}| \leq 2\pi \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} (x_{k+1} - x_k)$. Deoarece f' este continuă rezultă că există $M > 0$ astfel ca $\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} < M$ și,

$$|A_{\Delta_n} - S_{\Delta_n}| \leq 2\pi \varepsilon M(b - a),$$

ceea ce arată că

$$\lim_{v(\Delta_n) \rightarrow 0} A_{\Delta_n} = \lim_{v(\Delta_n) \rightarrow 0} S_{\Delta_n} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Volumul corpurilor cu secțiuni cunoscute

Fie un corp K în spațiu raportat la un sistem de axe ortogonale. Presupunem că corpul K este cuprins între planele $z = a$ și $z = b$ și că secțiunea printr-un plan z are aria cunoscută $S(z)$ (fig. 19).

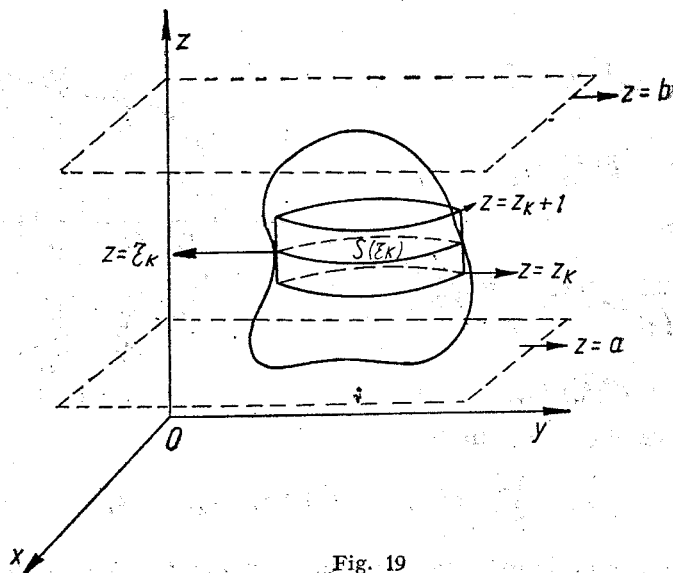


Fig. 19

Considerăm o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$.

$$a = z_0 < z_1 < \dots < z_{n-1} < z_n = b.$$

și fie

$$\xi_k \in [z_k, z_{k+1}).$$

Aproximăm volumul corpului K cu suma volumelor cilindrilor ce au aria secțiunii bazei $S(\xi_k)$ și înălțimea $(z_{k+1} - z_k)$. Obținem:

$$\sigma_{\Delta} = \sum_{k=0}^{n-1} S(\xi_k) (z_{k+1} - z_k)$$

care este o sumă Riemann și care converge pentru un șir (Δ_n) de diviziuni către:

$$\int_a^b S(z) dz.$$

Aplicații mecanice ale integralelor Riemann-Stieltjes.

Momente statice și centre de greutate ale plăcilor plane

Să considerăm o placă plană a cărei model matematic îl constituie domeniul D din figura 20 mărginit de graficul funcției $y = f(x)$.

Vom presupune că placa este omogenă și deci densitatea ei de masă este $\rho = \text{const.}$

Fie

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ și fie $(x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$ aria dreptunghiului construit pe (x_i, x_{i+1}) ca bază și de înălțime $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1})$.

Vom presupune că întreaga masă a plăcii dreptunghiulare este concentrată în centrul ei (care este și centrul de greutate).

Momentele statice ale dreptunghiului $[x_i, x_{i+1}] \times f(\xi_i)$ sînt date de:

$$K_{ix} = \frac{f(\xi_i)}{2} \cdot \rho f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \text{ și}$$

$$K_{iy} = \left(x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \rho f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) \approx \\ \approx x_i \rho f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

(S-a neglijat termenul $(x_{i+1} - x_i)^2$)

și, însumînd obținem:

$$K_x = \frac{1}{2} \rho \int_a^b y^2 dx; \quad K_y = \rho \int_a^b xy dx$$

unde $y = f(x)$.

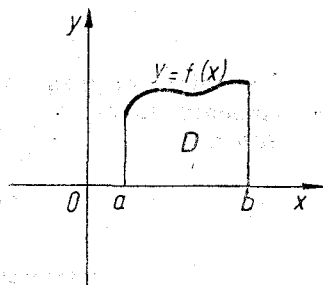


Fig. 20

Se știe de asemenea că dacă $\mathcal{M}$ este masa plăcii și (x_G, y_G) coordonatele centrului de greutate,

$$\mathcal{M} \cdot x_G = \rho \int_a^b xy \, dx, \quad \mathcal{M} \cdot y_G = \frac{1}{2} \rho \int_a^b y^2 \, dx$$

Dar, $\mathcal{M}_\Delta \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \rho f(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$ și aceasta este o sumă

Riemann care tinde la limită către

$$\mathcal{M} = \rho \int_a^b y \, dx$$

Rezultă

$$x_G = \frac{\int_a^b xy \, dx}{\int_a^b y \, dx}, \quad y_G = \frac{\int_a^b y^2 \, dx}{2 \int_a^b y \, dx}.$$

Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă ce se deplasează pe segmentul AB

Fie $\overline{F}$ o forță variabilă, care se deplasează pe segmentul AB (figura 21). Raportat la originea O , punctul A are abscisa a iar B , abscisa b .

Forța $\overline{F}$ este de forma: $\overline{F} = \overline{F}(x)$.

Pentru a determina lucrul mecanic efectuat de forța $\overline{F}$ vom considera o diviziune

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

a intervalului $[a, b]$ și vom presupune că forța F este constantă când punctul M parcurge intervalul $[x_i, x_{i+1})$ și valoarea ei este $F(\xi_i)$, $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Lucrul mecanic efectuat pe acest segment este:

$$F(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

Însumînd, obținem cu aproximație lucrul mecanic efectuat de forța F pe segmentul $[a, b]$.

Avem:

$$\mathcal{L}_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) (x_{i+1} - x_i).$$

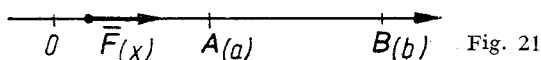


Fig. 21

Suma obținută este o sumă Riemann pentru funcția F corespunzătoare diviziunii Δ . La limită, pentru un șir de diviziuni de diametru tinzînd la zero,

$$\mathcal{L} = \int_a^b F(x) \, dx.$$

Momentul de inerție a unei bare materiale rectilinii în mișcarea de rotație

Fie o bară materială rectilinie care se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe ea (fig. 22).

Notăm densitatea de masă de-a lungul barei prin $\mu(x)$. Fie $\Delta = a_0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Dacă presupunem că întreaga masă a barei $[x_i, x_{i+1}]$ este concentrată într-un punct $M_i(\xi_i) \in [x_i, x_{i+1}]$, momentul de inerție al porțiunii $[x_i, x_{i+1}]$ este egal cu momentul de inerție al punctului de abscisă ξ_i și de masă $\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)$. Astfel, suma momentelor de inerție a tuturor porțiunilor, deci momentul de inerție al întregii bare va fi

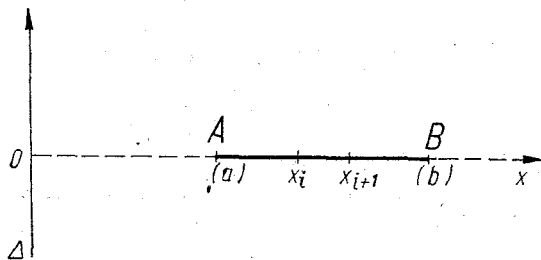


Fig. 22

$$I_{\Delta} = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 (\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i))$$

Însă sumele I_{Δ} converg pentru un șir de diviziuni de diametru tinzînd la zero către integrala Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b x^2 d\mu.$$

§ 3. METODE NUMERICE DE INTEGRARE

În multe cazuri determinarea primitivei unei funcții este o problemă ce nu se poate rezolva prin metode elementare.

Atunci se pot folosi sumele Riemann care reprezintă cu un grad oarecare de aproximație valoarea integralei $\int_a^b f dx$. Metoda însă nu este des folosită din cauză că sumele Riemann converg slab către funcția $f(x)$.

O altă categorie de metode aproximative pentru calculul integralelor de forma $\int_a^b f dx$ se obțin înlocuind funcția de sub integrală cu o funcție de interpolare. Vom prezenta cîteva din aceste metode.

Formula lui Newton-Côtes

Această formulă aproximativă se bazează pe înlocuirea funcției de sub integrală $f(x)$ cu polinomul de interpolare a lui Lagrange.

Presupunem că punctele de interpolare sînt repartizate astfel:

$$a, a + h, a + 2h, \dots, a + nh.$$

Se pot întâmpla 2 cazuri: limitele de integrare sînt și ele puncte de interpolare și în acest caz formula se numește de tip „închis” sau limitele de integrare nu sînt puncte de interpolare și atunci formula este de tip „deschis”.

Ne propunem să calculăm $\int_a^b f dx$ și introducem pasul

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Obținem astfel punctele de interpolare

$$x_0 = a, x_1 = a + h, x_2 = 2h + a, \dots, x_n = a + nh = b$$

cu valorile $y_i = f(x_i)$.

Polinomul de interpolare a lui Lagrange asociat funcției $f(x)$ cu punctele de interpolare $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ este

$$L_n(x) = \sum_0^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n+1})} y_i$$

și punînd $q = \frac{x-x_0}{h}$, $q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i} q^{[n+1]}}{i!(n-i)!(q-i)} y_i.$$

Cu aceasta integrala capătă forma:

$$\int_a^b f dx = \sum_{i=0}^n y_i \int_a^b \frac{(-1)^{n-i} q^{[n+1]}}{i!(n-i)!(q-i)} dx + R_n(f).$$

Trecînd la variabila q în această integrală obținem $dq = \frac{dx}{h}$

și

$$\int_a^b f dx = h \sum_0^n y_i \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} q^{[n+1]}}{i!(n-i)!(q-i)} dq + R_n(f)$$

sau încă notînd

$$H_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i} dq$$

putem scrie

$$\int_a^b f dx = (b-a) \sum_0^n H_i y_i + R_n(f)$$

unde H_i se numesc coeficienții lui Cotes. Formula obținută este de tip închis deoarece am considerat că a și b sînt puncte în interpolare.

Evaluarea restului în formula Newton Cotes. Pentru aceasta vom porni de la eroarea comisă prin înlocuirea unei funcții $f(x)$ cu polinomul de interpolare a lui Lagrange și stabilită la paragraful privitor la interpolarea funcțiilor.

Am stabilit atunci că

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} P_{n+1}(x)$$

unde ξ depinde de x și este situat între a și x .

De aici obținem că

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |P_{n+1}(x)|$$

și deci:

$$\begin{aligned} |R_n(f)| &= \left| \int_a^b (f(x) - L_n(x)) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - L_n(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b P_{n+1}(x) dx = \frac{M}{(n+1)!} \int_a^b |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)| dx. \end{aligned}$$

Obținem astfel o majorare a erorii comise. O expresie exactă a restului $R_n(f)$ este dată pentru formula de tip închis de:

$$R_n(f) = - \frac{h^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!} \int_0^{2m-1} \varphi(q) dq$$

cînd $h = \frac{b-a}{2m-2}$ și $n = 2m-1$

și

$$\begin{aligned} R_n(f) &= \frac{h^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)}{2(m)!} \left[\int_{2m-1}^{2m} q(q-1)\dots(q-2m) dq - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{2m-1} \varphi(q) dq \right] \text{ cînd } h = \frac{b-a}{2m-1} \text{ și } n = 2m \end{aligned}$$

și

$$\varphi(q) = \int_0^q y(y-1)\dots(y-2m+1) dy.$$

Nu vom da demonstrația acestor evaluări fiind foarte laborioasă. Ea se găsește în „Metodă vîcislenia“ Berezin și Jîdkov din 1962.

Exemplu. Să se determine valoarea integralei $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ și aproximația pe care o facem cînd luăm ca puncte de interpolare pentru $f(x)$ punctele

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{4}, \quad x_2 = \frac{3}{4}, \quad x_4 = 1.$$

În acest caz $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$y_3 = \frac{4}{5}; y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}; n = 4, h = \frac{1}{4}; a = 0, b = 1.$$

Formula lui Newton Cotes conduce la:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = H_0 y_0 + H_1 y_1 + H_2 y_2 + H_3 y_3 + H_4 y_4 + R_4(f)$$

cu

$$H_0 = \frac{(-1)^4}{4 \cdot 4!} \int_0^4 (q-1)(q-2)(q-3)(q-4) dq$$

$$H_1 = \frac{(-1)^3}{4 \cdot 1! 3!} \int_0^4 q(q-2)(q-3)(q-4) dq$$

$$H_2 = \frac{(-1)^2}{4 \cdot 2! 2!} \int_0^4 q(q-1)(q-3)(q-4) dq$$

$$H_3 = \frac{(-1)}{4 \cdot 3! 1!} \int_0^4 q(q-1)(q-2)(q-4) dq$$

$$H_4 = \frac{1}{4 \cdot 4!} \int_0^4 q(q-1)(q-2)(q-3) dq.$$

Prezentăm rezultatele în tabloul următor

i	x_i	y_i	H_i	$H_i y_i$
0	0	0	—	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{16}{45}$	0,350
2	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{15}$	0,119
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{45}$	0,284
4	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{90}$	0,055
Σ				0,808

Valoarea exactă a integralei este

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \Big|_0^1 = \ln(1 + \sqrt{2}) = \ln(1 + 1,4142) = 0,8620$$

Cazuri particulare importante ale formulei lui Cotes conduc la alte metode de calcul aproximativ al integralei definite.

Metoda trapezelor

Aplicând formula lui Cotes pentru $n = 1$ obținem

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq (y_0 H_0 + y_1 H_1) h$$

unde

$$H_0 = - \int_0^1 (q-1) dq = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \int_0^1 q dq = \frac{1}{2}$$

sau încă:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \simeq \frac{1}{2} (y_0 + y_1) h.$$

Aproximația constă în înlocuirea curbei $y = f(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, cu coarda ce unește punctele $A_0(x_0, y_0)$ și $A_1(x_1, y_1)$.

Eroarea este dată de

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2} [y_0 + y_1] = \int_{x_0}^{x_0+h} y dx - \frac{h}{2} (y(x_0) + y(x_0 + h)).$$

Derivând această formulă în raport cu h de două ori obținem

$$\begin{aligned} R'(h) &= y(x_0 + h) - \frac{1}{2} (y(x_0) + y(x_0 + h)) - \\ &- \frac{h}{2} y'(x_0 + h) = \frac{1}{2} [y(x_0 + h) - y(x_0)] - \frac{h}{2} y'(x_0 + h). \\ R''(h) &= \frac{1}{2} y'(x_0 + h) - \frac{1}{2} y'(x_0 + h) - \frac{h}{2} y''(x_0 + h) = \\ &= -\frac{h}{2} y''(x_0 + h). \end{aligned}$$

De asemenea

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0.$$

Integrând în raport cu h și aplicând formula de medie obținem:

$$\begin{aligned} R'(h) &= R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^h t y''(x_0 + t) dt = \\ &= -\frac{1}{2} y''(\xi_1) \int_0^h t dt = -\frac{h^2}{4} y''(\xi_1) \\ &\quad \xi_1 \in (x_0, x_0 + h). \end{aligned}$$

De asemenea

$$\begin{aligned} R(h) &= R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{2} \int_0^h t^2 y''(\xi_1) dt = \\ &= -\frac{1}{4} y''(\xi) \int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_0 + h). \end{aligned}$$

În final rezultă:

$$R = -\frac{h^3}{12} y''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1).$$

Pentru a obține o formulă mai precisă de aproximare considerăm intervalul $[a, b]$ de integrare împărțit în n părți egale

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

și aplicăm formula obținută pentru $n = 1$ fiecăreia din aceste intervale. Însumând obținem:

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \frac{h}{2} (y_0 + y_1) + \frac{h}{2} (y_1 + y_2) + \dots + \frac{h}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

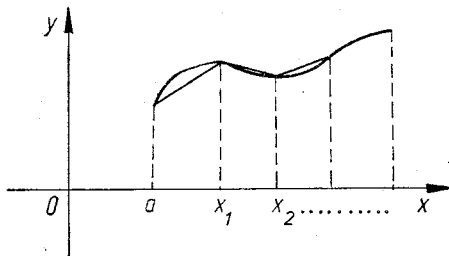


Fig. 23

sau încă

$$\int_a^b f dx \simeq h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right).$$

Aproximarea pe care o facem este ilustrată în figura 23.

Restul este dat în acest caz de:

$$R = \int_{x_0}^{x_n} y \, dx - \frac{h}{2} \sum_1^n (y_{i-1} + y_i) =$$

$$= \int_{x_0}^{x_n} y \, dx - \frac{h}{2} \sum_1^n (y_{i-1} + y_i) = -\frac{h^3}{12} \sum_1^n y''(\xi_i),$$

$$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Luînd media aritmetică

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_1^n y''(\xi_i)$$

cum f este considerată continuă, are proprietatea lui Darboux deci există ξ astfel ca

$$y''(\xi) = \mu$$

și deci

$$R = -\frac{h^3 n}{12} y''(\xi)$$

Formula lui Simpson

Luînd în formula lui Cotes pentru calculul integralei

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) \, dx, \quad n = 2 \text{ obținem}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y \, dx \simeq (x_2 - x_0) (y_0 H_0 + y_1 H_1 + y_2 H_2)$$

unde

$$H_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 (q-1)(q-2) \, dq = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} \int_0^2 q(q-2) \, dq = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_0^2 q(q-1) \, dq = \frac{1}{6}$$

și deci:

$$\int_{x_0}^{x_2} y \, dx \simeq \frac{2h}{6} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Din punct de vedere geometric calculul integralei cu această aproximație revine la a înlocui curbe $y = f(x)$ prin arcul de parabolă $y = f(x)$ care trece prin punctele $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Restul este dat de

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y \, dx - \frac{h}{3} [y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)].$$

Derivând de trei ori funcția $R(h)$ obținem:

$$\begin{aligned} R'(h) &= [y(x_1+h) + y(x_1-h)] - \frac{1}{3} [y(x_1-h) + 4y(x_1) + \\ &\quad + y(x_1+h)] - \frac{h}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] = \\ &= \frac{2}{3} [y(x_1-h) + y(x_1+h)] - \frac{4}{3} y(x_1) - \\ &\quad - \frac{h}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)], \\ R''(h) &= \frac{2}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \\ &\quad - \frac{1}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \\ &\quad - \frac{h}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] = \\ &= \frac{1}{3} [-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \frac{h}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)], \\ R'''(h) &= \frac{1}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] - \\ &\quad - \frac{1}{3} [y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] - \frac{h}{3} [-y'''(x_1-h) + y'''(x_1+h)] = \\ &= -\frac{h}{3} [y'''(x_1+h) - y'''(x_1-h)] = -\frac{2h^2}{3} y^{IV}(\xi_3) \end{aligned}$$

De asemenea $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$.

Integrând $R'''(h)$ și aplicând teorema de medie obținem:

$$\begin{aligned} R''(h) &= R''(0) + \int_0^h R'''(t) \, dt = -\frac{2}{3} \int_0^h t^2 y^{IV}(\xi_3) \, dt = \\ &= -\frac{2}{3} y^{IV}(\xi_2) \int_0^h t^2 \, dt = -\frac{2}{9} h^3 y^{IV}(\xi_2) \\ &\quad \xi_2 \in (x_1-h, x_1+h). \end{aligned}$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t) dt = -\frac{2}{9} \int_0^h t^3 y^{IV}(\xi_2) dt =$$

$$= -\frac{2}{9} y^{IV}(\xi_1) \int_0^h t^3 dt = -\frac{1}{18} h^4 y^{IV}(\xi_1)$$

$$\xi_1 \in (x_1 - h, x_1 + h).$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t) dt = -\frac{1}{18} \int_0^h t^4 y^{IV}(\xi_1) dt =$$

$$= -\frac{1}{18} y^{IV}(\xi) \int_0^h t^4 dt = -\frac{h^5}{90} y^{IV}(\xi)$$

$$\xi \in (x_1 - h, x_1 + h).$$

Pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(x) dx$$

împărțim intervalul $[a, b]$ în $2k$ părți și notăm

$$h = \frac{b - a}{2k}.$$

Aplicînd pentru fiecare interval $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ formula lui Simpson obținem:

$$\int_a^b f dx \approx \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots +$$

$$+ \frac{h}{3} (y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

care se numește formula lui Simpson.

Eroarea este dată de

$$R = -\frac{h^5}{90} \sum_{k=1}^m y^{IV}(\xi_k) = -\frac{mh^5}{90} y^{IV}(\xi).$$

Formula de cuadratură a lui Gauss

Ideea formulei de cuadratură a lui Gauss este de a înlocui integrala $\int_{-1}^1 f(t) dt$ cu $\sum_{i=1}^n A_i f(t_i)$, unde $f(t)$ este o funcție definită pe $[-1, 1]$ iar punctele $t_1, t_2, \dots, t_n$ și coeficienții $A_1, A_2, \dots, A_n$ se aleg astfel ca formula

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i) \quad (1)$$

să fie exactă pentru toate polinoamele $f(t)$ de grad N cel mai mare posibil. Deoarece t_i și A_i sînt în număr de $2n$, gradul lui $f(t)$ maxim este $2n - 1$.

Pentru aceasta este necesar și suficient ca egalitatea (1) să fie verificată pentru

$$f(t) = 1, \quad f(t) = t, \quad f(t) = t^2, \dots, f(t) = t^{2n-1}.$$

Punînd

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \sum_1^n A_i t_i^k, \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1)$$

și

$$f(t) = \sum_0^{2n-1} C_k t^k.$$

Vom avea:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(t) dt &= \sum_0^{2n-1} C_k \int_{-1}^1 t^k dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^n A_i t_i^k = \\ &= \sum_{i=1}^n A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^n A_i f(t_i). \end{aligned}$$

Dar

$$\int_{-1}^1 t^k dt = \frac{1 - (-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \frac{2}{k+1}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

și deci este suficient să se determine t_i și A_i plecînd de la sistemul de n ecuații

$$\sum_{i=1}^n A_i = 2, \quad \sum_{i=1}^n A_i t_i = 0, \dots, \quad \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n+2} = \frac{2}{2n-1} \sum_{i=1}^n A_i t_i^{2n-1} = 0. \quad (2)$$

Rezolvarea unui asemenea sistem este o problemă dificilă. Se poate aplica însă următorul artificiu:

Se consideră polinoamele:

$$f(t) = t^k P_n(t), \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

unde $P_n(t)$ sînt polinoamele lui Legendre.

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n], \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

Trebuie ca

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = \sum_1^n A_i t_i^k P_n(t_i), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Polinoamele lui Legendre au următoarele proprietăți:

- 1) $P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n, \quad n = 0, 1, \dots$
- 2) $P_n(x)$ are toate rădăcinile reale între -1 și $+1$ ceea ce se poate stabili dacă aplicăm teorema lui Rolle funcției

$$f(x) = (x^2 - 1)^n, \text{ de } n \text{ ori}$$

$$3) \int_{-1}^1 P_n(t) t^k dt = 0, \quad (k < n)$$

ceea ce se arată astfel:

$$\int_{-1}^1 P_n(t) t^k dt = [(t^2 - 1)^n]^{n-1} t^k \Big|_{-1}^1 - k \int_{-1}^1 t^{k-1} [(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} dt$$

Dar: $[(t^2 - 1)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^1 = 0$ deoarece $t = 1$ și $t = -1$ sînt rădăcini de ordin „ n ” de multiplicitate pentru funcția $(t^2 - 1)^n$ ceea ce arată că anulează și derivata și de ordin $(n-1)$.

Obținem deci:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(t) t^k dt &= -k \int_{-1}^1 t^{k-1} [(t^2 - 1)^n]^{n-1} dt = \\ &= -k [t^{k-1} [(t^2 - 1)^n]^{(n-2)}] \Big|_{-1}^1 - (k-1) \int_{-1}^1 t^{k-2} [(t^2 - 1)^n]^{(n-2)} dt = \\ &= k(k-1) \int_{-1}^1 t^{k-2} [(t^2 - 1)^n]^{(n-2)} dt = \dots = \\ &= (-1)^k k(k-1) \dots 1 \int_{-1}^1 [(t^2 - 1)^n]^{(n-k)} dt = \\ &= (-1)^k k! [(t^2 - 1)^n]^{(n-k+1)} \Big|_{-1}^1 = 0 \end{aligned}$$

Aplicînd această a 3-a proprietate a polinoamelor Legendre rezultă că

$$\int_{-1}^1 t^k P_n(t) dt = 0 \quad \text{pentru } k < n$$

deci:

$$\sum_1^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Dacă punem $P_n(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ au loc egalitățile

$$\sum_1^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0.$$

Dar rădăcinile polinomului Legendre sînt toate în $(-1, +1)$. Deci luînd t_i ca fiind rădăcinile polinomului Legendre, obținem A_i din sistemul $\sum_{i=1}^n A_i t_i^k P_n(t_i) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Determinantul sistemului este un determinat Vandermonde deci

$$D = \prod_{i < j} (t_i - t_j) \neq 0 \text{ deoarece } t_i \neq t_j.$$

Formula

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = \sum_1^n A_i f(t_i)$$

unde t_i sînt rădăcinile polinomului lui Legendre iar A_i se determină din sistemul liniar considerat se numește formula de cuadratură a lui Gauss.

În general pentru a aplica formula lui Gauss integralei $\int_a^b f(x) dx$ se face schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t \text{ care aduce integrăla la forma}$$

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t\right) dt$$

pentru care se poate aplica formula lui Gauss.

Se obține astfel:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2} \sum_1^n A_i f(x_i)$$

$$\text{ca } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

t_i fiind zerourilor polinomului lui Legendre $P_n(t)$.

Se arată că eroarea în formula lui Gauss este

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1} (n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3 (2n+1)}$$

Pentru stabilirea erorii recomandăm lucrarea I. Berezin, N. Jidkov „Metode de calcul” (Fizmatgiz, 1959, în lb. rusă, vol. I).

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ folosind formula lui Gauss cu $n = 4$.

Aici $a = 0, b = 1, t_1 = -0,7746, t_2 = 0, t_3 = 0,7746$ deoarece polinomul lui Legendre pentru $n = 3$ este:

$$P_4(t) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!} [(t^2 - 1)^3]^{(3)} = \frac{5t^3 - 3t}{2}$$

Urmărim calculul integralei în tabelul:

i	x_i	$f(x_i)$	A_i	$A_i f(x_i)$
1	0,1127	0,9033	0,2778	0,2509
2	0,5000	0,7071	0,4444	0,3142
3	0,8873	0,6003	0,2778	0,1668
Σ				0,7319

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{t_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3$$

Observație. Folosirea formulei lui Gauss este greoaie datorită faptului că t_i sînt numere iraționale.

§ 4. INTEGRALA LEBESGUE

Pentru a înțelege ideea de la care plecăm pentru a defini integrala Lebesgue să ne amintim că integrala Riemann este limita sumelor de forma

$$\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot l(E_i), \quad f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

unde $l(E_i) = t_i - t_{i-1}$ și reprezintă lungimea intervalului (t_{i-1}, t_i) .

Integrala Lebesgue are în vedere o clasă mai generală de mulțimi E_i , așa-numitele mulțimi măsurabile iar clasa funcțiilor f este clasa funcțiilor măsurabile.

Să lămurim aceste 2 noțiuni necesare pentru definirea integralei Lebesgue.

Vom avea în vedere permanent analogia între noțiunile de spațiu topologic, mulțimea deschisă, funcție continuă pe de o parte și pe de altă parte spațiu măsurabil, mulțime măsurabilă și funcția măsurabilă.

Definiția 1.40. O familie $\mathfrak{M}$ de submulțimi ale mulțimii X se numește σ -algebră în X dacă $\mathfrak{M}$ are proprietățile:

- 1) $X \in \mathfrak{M}$
- 2) Dacă $A \in \mathfrak{M}$ atunci $C A \in \mathfrak{M}$.
- 3) Dacă $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{M}$ atunci $A \in \mathfrak{M}$.

Exemplu. Pentru orice mulțime X , familia $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(X)$ (mulțimea părților din X) este o σ -algebră.

Dacă $\mathfrak{M}$ este o σ -algebră în X atunci X se numește *spațiu măsurabil* și elementele lui $\mathfrak{M}$ se numesc *mulțimi măsurabile* în X .

Dacă X este un spațiu măsurabil, Y este un spațiu topologic iar $f : X \rightarrow Y$, f se numește *funcție măsurabilă* dacă $f^{-1}(Y)$ este o mulțime măsurabilă în X pentru orice mulțime deschisă în Y .

Vom nota spațiul măsurabil cu $(X, \mathfrak{M})$.

Teoremă 1.4. Fie Y și Z spații topologice și $g : Y \rightarrow Z$, g continuă.

Dacă $(X, \mathfrak{M})$ este un spațiu măsurabil și $f : X \rightarrow Y$ este măsurabilă și $h = g \circ f$ atunci $h : X \rightarrow Z$ este măsurabilă.

Demonstrație. Deoarece $f : X \rightarrow Y$ și f este măsurabilă prin definiție,

$$f^{-1}(V)$$

este mulțimea măsurabilă în X , $(\forall) V$ mulțime deschisă în Y .

Fie $U \subset Z$, U mulțime deschisă.

Trebuie arătat că $h^{-1}(U)$ este mulțime măsurabilă în X .

Dar $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Deoarece g este continuă, $g^{-1}(U)$ este o mulțime deschisă în Y și $f^{-1}(g^{-1}(U))$ este o mulțime măsurabilă în X deoarece f este măsurabilă. Rezultă că h este măsurabilă.

Rezultatul se păstrează dacă considerăm o funcție compusă de tipul $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$. Astfel are loc

Teorema 2.4. Fie u, v funcții reale măsurabile pe un spațiu măsurabil $(X, \mathfrak{M})$; fie Φ o aplicație continuă a lui $\mathbb{R}^2$ în Y , atunci în compunerea

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x)), \quad x \in X$$

funcția $h : X \rightarrow Y$ este măsurabilă.

Exemplu

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

χ_E este o funcție măsurabilă dacă E este măsurabilă.

Funcția χ_E se numește funcția caracteristică a mulțimii E .

În legătură cu existența unei σ -algebre are loc

Teorema 3.4. Dacă $\mathfrak{F}$ este o familie oarecare de submulțimi ale lui X , există o cea mai mică σ -algebră $\mathfrak{M}^*$ în X astfel ca $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$. $\mathfrak{M}^*$ se numește σ -algebra generată de $\mathfrak{F}$.

Demonstrație. Fie Ω familia tuturor σ -algebrelor $\mathfrak{M}$ din X care conțin pe $\mathfrak{F}$ (există sigur o σ -algebră anume $\mathfrak{A}(X)$).

Fie $\mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathfrak{M}$

Observăm că $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}^*$ deoarece $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{M} \ (\forall) \mathfrak{M} \in \Omega$. $\mathfrak{M}^*$ de asemenea este o σ -algebră deoarece:

- 1) Dacă $A_n \in \mathfrak{M}^* \rightarrow A_n \in \mathfrak{M}, (\forall) \mathfrak{M} \in \Omega$ și $\bigcup_1^\infty A_n \in \mathfrak{M} \rightarrow \bigcup_1^\infty A_n \in \mathfrak{M}^*$
- 2) $X \in \mathfrak{M}, (\forall) \mathfrak{M} \in \Omega$ deci $X \in \mathfrak{M}^*$.
- 3) Dacă $A \in \mathfrak{M}^* \rightarrow A \in \mathfrak{M}, (\forall) \mathfrak{M} \in \Omega \rightarrow CA \in \mathfrak{M} \rightarrow CA \in \mathfrak{M}^*$.

Exemplu. Dacă X este un spațiu topologic și considerăm $\mathfrak{F}$ familia mulțimilor deschise în X atunci conform teoremei precedente există o cea mai mică σ -algebră $\mathfrak{B}$ astfel ca $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B}$ (ceea ce arată că orice mulțime deschisă este în $\mathfrak{B}$). Mulțimile din $\mathfrak{B}$ se numesc mulțimi *boreliene*.

Teorema 4.4. Fie $\mathfrak{M}$ o σ -algebră în X și Y un spațiu topologic. Fie $f: X \rightarrow Y$.

a) Dacă Ω este familia mulțimilor $E \subset Y$ pentru care $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ atunci Ω este o σ -algebră în Y .

b) Dacă f este măsurabilă și E este o mulțime Borel în Y atunci $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

c) Dacă $Y = (-\infty, \infty)$ și $f^{-1}(\alpha, \infty) \in \mathfrak{M}$ ($\forall \alpha \in \mathbf{R}$), atunci f este măsurabilă.

Demonstrație: a) se demonstrează din relațiile

$$f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \dots$$

b) Fie Ω ca în a); măsurabilitatea lui f implică că Ω conține toate mulțimile deschise în Y și cum Ω este o σ -algebră $\rightarrow \Omega$ conține toate mulțimile Borel în Y .

c) fie Ω familia tuturor mulțimilor $E \subset (-\infty, +\infty)$ astfel că $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$. Deoarece Ω este o σ -algebră în $(-\infty, +\infty)$ și $(\alpha, \infty) \in \Omega$, ($\forall \alpha$ real) acest lucru este adevărat și pentru mulțimile:

$$(-\infty, \alpha) = \bigcup_1^\infty \left(-\infty, \alpha - \frac{1}{n} \right) = \bigcup_1^\infty C \left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty \right)$$

și $(\alpha, \beta) = (-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty)$.

Deoarece orice mulțime deschisă în $(-\infty, +\infty)$ este o reuniune numărabilă de segmente, Ω conține orice mulțime deschisă, astfel f este măsurabilă.

Funcții simple

Definiția 2.4. O funcție s măsurabilă în X care ia numai un număr finit de valori în $[0, \infty)$ se numește funcție simplă.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt valorile distincte ale unei funcții simple s și dacă $A_i = \{x, s(x) = \alpha_i\}$, se poate scrie:

$$s = \sum_1^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

unde χ_{A_i} este funcția caracteristică a lui A_i . Legătura între o funcție măsurabilă oarecare și funcțiile simple este dată de

Teorema 5.4. Fie $f: X \rightarrow (0, \infty)$ măsurabilă. Există funcțiile simple s_n pe X astfel ca:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$$

$$s_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{cînd } n \rightarrow \infty, \quad (\forall) x \in X.$$

Demonstrație. Pentru $n = 1, 2, 3, \dots$ și pentru $1 \leq i \leq n2^n$ definim:

$$E_{n,i} = f^{-1} \left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n} \right) \right) \text{ și } F_n = f^{-1}([n, \infty))$$

și fie

$$s_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n \chi_{F_n}.$$

Conform teoremei precedente $E_{n,1}$ și F_n sînt mulțimi măsurabile.

Se vede că $s_{n-1} \leq s_n$.

Dacă x este astfel ca $f(x) < \infty$, atunci

$s_n(x) \geq f(x) - 2^{-n}$, dacă $f(x) = \infty$ atunci

$s_n(x) = x$ și acesta arată că

$$s_n(x) \rightarrow f(x).$$

Vom defini în cele ce urmează noțiunea de măsură.

Definiția 3.4. O măsură pozitivă este o funcție μ definită pe o σ -algebră $\mathfrak{M}$ cu valori în $[0, \infty)$ funcție numărabilă aditivă. Aceasta înseamnă că dacă $\{A_i\}$ este o familie numărabilă de mulțimi disjuncte din $\mathfrak{M}$ atunci:

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Exemple. 1) Fie $x_0 \in X$ și $\mu(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$

pentru orice $E \subset X$, μ astfel definit este o măsură.

2) Fie $X = \mathbf{R}^2$ și să considerăm mulțimea dreptunghiurilor

$$D_{a,b} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2].$$

Asociem fiecărui dreptunghi un număr

$$m(D_{a,b}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

numit aria lui $D_{a,b}$. Observăm că funcția m astfel definită este o măsură în sensul definiției de mai sus unde $\mathfrak{M}$ este mulțimea dreptunghiurilor disjuncte din $\mathbf{R}^2$.

Definiția 4.4. Un spațiu măsură este un spațiu măsurabil care are o măsură pozitivă definită pe σ -algebra mulțimilor lui măsurabile.

Îl vom nota $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Vom defini mai departe integrala Lebesgue a funcțiilor simple.

Fie $\mathfrak{M}$ σ -algebră într-o mulțime X și μ o măsură pozitivă pe $\mathfrak{M}$.

Definiția 5.4. Dacă s este o funcție simplă măsurabilă pe X de forma:

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A_i}$$

și $E \in \mathfrak{M}$ definim

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

(facem convenția ca $0, \infty = 0$).

Dacă f este o funcție măsurabilă $f : X \rightarrow [0, \infty)$ și $E \in \mathfrak{M}$ definim

$$\int_E f \, d\mu = \sup \int_E a \, d\mu$$

marginia superioară fiind luată în raport cu toate funcțiile simple măsurabile astfel ca $0 \leq s \leq f$.

Numărul $\int_E f \, d\mu$ astfel definit se numește integrale Lebesgue a lui f pe E în raport cu măsura μ .

Proprietăți ale integralei Lebesgue

1) dacă $0 \leq f \leq g$ atunci $\int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$.

2) dacă $A \subset B$ și $f \geq 0$ atunci $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$.

3) dacă $f \geq 0$ și c este constant, $0 \leq c \leq \infty$ atunci $\int_E c f \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$.

4) dacă $f(x) = 0 \quad (\forall) x \in E$, $\int_E f \, d\mu = 0$.

5) dacă $\mu(E) = 0$, atunci $\int_E f \, d\mu = 0$ chiar dacă $f(x) = \infty$ în $x_0 \in E$.

6) dacă $f \geq 0$, atunci $\int_E f \, d\mu = \int_X \chi_E f \, d\mu$.

O altă proprietate a integralei este dată în

Teorema 6.4. Fie s_1 și s_2 funcții simple măsurabile pe X . Pentru $E \in \mathfrak{M}$ definim

$$\varphi(E) = \int_E s_1 \, d\mu.$$

Atunci φ este o măsură pe $\mathfrak{M}$ și

$$\int_X (s_1 + s_2) \, d\mu = \int_X s_1 \, d\mu + \int_X s_2 \, d\mu.$$

Demonstrație. Fie $E = E_1 \cup E_2 \cup \dots$ unde $E_i \cap E_j = \emptyset$ când $i \neq j$, atunci

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j)\end{aligned}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt valorile luate de s .

Fie $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ valorile luate de s_2 și $B_j = \{x, s_2(x) = \beta_j\}$. Dacă $E_{ij} = A_i \cap E_j$ atunci

$$\int_{E_{ij}} (s_1 + s_2) d\mu = (\alpha_i + \beta_j) \mu(E_{ij})$$

și

$$\int_{E_{ij}} s_1 d\mu + \int_{E_{ij}} s_2 d\mu = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij})$$

și cum $X = \bigcup_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} E_{ij}$ teorema este demonstrată.

Dacă f este o funcție care ia valori în $[-\infty, +\infty]$ definim

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

n ipoteza că cel puțin una din integralele din membrul 2 este finită.

Am notat $f^+ = \max \{f, 0\}$ și $f^- = \min \{f, 0\}$ și le numim partea pozitivă respectivă partea negativă a lui f .

O teoremă deosebit de importantă referitoare la integrarea Lebesgue a unui șir de funcții măsurabile este dată de:

7.4. Teorema de convergență a lui Lebesgue

Fie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de funcții măsurabile pe X și să presupunem că

a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty$, $(\forall) x \in X$

b) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ când $n \rightarrow \infty$, $(\forall) x \in X$.

Atunci f este măsurabilă și

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu, \text{ când } n \rightarrow \infty.$$

Nu vom da demonstrația acestei teoreme.

Vom stabili în continuare cîteva inegalități mai des folosite în analiză.

Reamintim definiția unei funcții convexe $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$.

φ este convexă dacă are loc inegalitatea

$$\varphi((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x) + \lambda\varphi(y)$$

$$(\forall) \quad a < x < b, \quad a < y < b \text{ și } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Această condiție din definiție poate fi înlocuită prin următoarea condiție echivalentă

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t}$$

oricare ar fi $a < s < t < u < b$.

Inegalitatea lui Jensen. Fie μ o măsură pozitivă pe o σ -algebră $\mathfrak{M}$ din Ω astfel ca $\mu(\Omega) = 1$. Dacă f este o funcție reală cu $|f|$ integrabilă în raport cu μ și dacă $a < f < b$ ($\forall x \in \Omega$) iar φ este convexă pe (a, b) atunci

$$\varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right) \leq \int_{\Omega} \varphi \circ f d\mu.$$

Demonstrație. Fie $t = \int_{\Omega} f d\mu$. Atunci $a < t < b$. Dacă β este marginea superioară a raportului

$$\frac{\varphi(t) - \varphi(s)}{t - s} \text{ cu } a < s < t$$

atunci β este majorat de oricare raport de forma

$$\frac{\varphi(u) - \varphi(t)}{u - t} \quad (\forall t < u < b).$$

Rezultă deci că

$$\varphi(s) \geq \varphi(t) + \beta(s - t). \quad (a < s < b).$$

Deci

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \geq 0$$

($\forall x \in \Omega$). Deoarece φ este continuă $\varphi \circ f$ este măsurabilă și integrând în ambii membri în raport cu μ , rezultă

$$\int_{\Omega} \varphi(f(x)) d\mu - \varphi(t) \mu(\Omega) - \beta \int_{\Omega} (f(x) - t) d\mu \geq 0$$

dar $\mu(\Omega) = 1$ și $t = \int_{\Omega} f d\mu$ deci,

$$\int_{\Omega} \varphi(f) d\mu \geq \varphi\left(\int_{\Omega} f d\mu\right).$$

Dacă $\Omega = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ și $\mu(\{p_i\}) = \frac{1}{n}$, $f(p_i) = x_i$, obținem

$$\exp\left\{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\right\} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + \dots + e^{x_n})$$

de unde rezultă că $\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{1}{n}(y_1 + \dots + y_n)$, $y_i = e^{x_i}$.

Dacă $\mu(\{p_i\}) = \alpha_i > 0$ cu $\sum \alpha_i = 1$ obținem inegalitatea

$$y_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$$

luând în inegalitatea lui Jensen, $f = \ln g$ rezultă

$$\exp \left\{ \int_{\Omega} \ln g \, d\mu \right\} \leq \int_{\Omega} g \, d\mu.$$

Inegalitățile lui Hölder și Minkovski

Fie $p, q > 0$ astfel ca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Fie X un spațiu măsură cu măsura μ , f și g funcții măsurabile pe X cu valori în $[0, \infty]$. Atunci

$$\int_X f g \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q} \quad (1)$$

(inegalitatea lui Hölder).

și

$$\left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q} \quad (2)$$

(inegalitatea lui Minkovski).

Demonstrație. Vom considera numai cazul

$$A = \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} > 0, \quad B = \left(\int_X g^q \, d\mu \right)^{1/q} > 0$$

și A și B finit.

$$\text{Fie } F = \frac{f}{A} \text{ și } G = \frac{g}{B}.$$

Atunci

$$\int_X F^p \, d\mu = \int_X G^q \, d\mu = 1.$$

Dacă $x \in X$ este astfel ca $0 < F(x) < \infty$ și $0 < G(x) < \infty$ există numerele reale s și t astfel ca: $F(x) = e^{s/p}$, $G(x) = e^{t/q}$.

Deoarece $1/p + 1/q = 1$ din convexitatea funcției exponențiale rezultă

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leq \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q}$$

și dacă

$$F(x) \cdot G(x) \leq p^{-1} (F(x))^p + q^{-1} (G(x))^q$$

pentru orice $x \in X$.

Integrând în inegalitatea de mai sus obținem:

$$\int_X F \cdot G \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Înlocuind F și G cu expresiile lor obținem inegalitatea lui Hölder.

Pentru a arăta (2) scriem

$$(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$$

și aplicând inegalitatea lui Hölder

$$\int_X f(f + g)^{p-1} \, d\mu \leq \left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q}$$

și la fel

$$\int_X g(f + g)^{p-1} \, d\mu \leq \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{1/q}$$

Adunând membru cu membru aceste inegalități și ținând seama că $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ rezultă

$$\int_X (f + g)^p \, d\mu \leq \left(\int_X (f + g)^p \, d\mu \right)^{1/q} \left[\left(\int_X f^p \, d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu \right)^{1/p} \right]$$

ceea ce arată (2).

Pentru $p = q = \frac{1}{2}$ inegalitatea lui Hölder capătă forma:

$$\int_X fg \, d\mu \leq \sqrt{\int_X f^2 \, d\mu \int_X g^2 \, d\mu}$$

și se numește inegalitatea lui Schwarz.

5. MĂSURA LEBESGUE

Vom da un exemplu de măsură cu care ne întâlnim mai des: măsura Lebesgue. Vom indica în continuare modul de construcție a acestei măsuri.

Definiția 1.5. Mulțimea $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$ cu $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ o vom numi dreptunghi în $\mathbf{R}^n$.

Facem convenția ca să fie posibil $a_i = b_i$ pentru un i eventual.

O mulțime $A \subset \mathbf{R}^n$ care se poate scrie ca reuniunea unui număr finit de dreptunghiuri se numește *mulțime elementară*.

Notăm

$$m(I) = \prod_1^n (b_i - a_i)$$

și $m(A) = m(I_1) + m(I_2) + \dots + m(I_p)$.

dacă $A = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_p$ și $I_k \cap I_j = \emptyset$, $k \neq j$.

Spunem că m este finit aditivă. Observăm că $m(A) \geq 0$.

Fie $\mathcal{S}$ mulțimea tuturor mulțimilor elementare A care se scriu ca reuniune de dreptunghiuri disjuncte 2 câte 2.

În cazul particular $n = 1, 2, 3$, m reprezintă lungimea, aria, volumul.

Definiția 2.5. Spunem că o funcție de mulțime definită pe $\mathcal{S}$ nenegativă aditivă este *regulată* dacă există, pentru orice $A \in \mathcal{S}$ și orice $\varepsilon > 0$, o mulțime închisă F și o mulțime deschisă O astfel ca:

$$\varphi(O) - \varepsilon \leq \varphi(A) \leq \varphi(F) + \varepsilon.$$

În sensul acestei definiții funcția m definită mai sus este o funcție de mulțime regulată.

Într-adevăr pentru orice dreptunghi n -dimensional se aplică definiția funcției regulate.

Definiția 3.5. Fie μ o funcție aditivă, regulată, nenegativă și finită pe $\mathcal{S}$ și $E \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime oarecare pentru care:

$$E \subset \bigcup_1^\infty A_n,$$

(A_n mulțimi elementare deschise). Numim măsură interioară a mulțimii E , numărul $\mu^*(E)$ definit astfel:

$$\mu^*(E) = \inf \sum_1^\infty \mu(A_n)$$

unde $\mu^*(E)$ este măsura interioară a mulțimii E corespunzătoare funcției.

Observăm că $\mu^*(E) \geq 0$, $(\forall) E \in \mathbb{R}^n$ și

$$\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2) \text{ pentru } E_1 \subset E_2.$$

Are loc

Teorema 1.5. $(\forall) A \in \mathcal{S} \rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)$ și dacă $E = \bigcup_1^\infty E_n$ atunci

$$\mu^*(E) \leq \sum_1^\infty \mu^*(E_n) \quad \text{[(semiaditivitate)]}$$

Observăm că μ^* este o prelungire a lui μ la toate submulțimile din $\mathbb{R}^n$

Demonstrație. Fie $A \in \mathcal{S}$ și $\varepsilon > 0$, μ este regulată deci $(\exists) O$, mulțime deschisă, astfel ca:

$$\mu(O) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Cum $\mu^*(A) \leq \mu(O)$ și cum ε este arbitrar

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Din definiția lui μ^* există un șir $\{A_n\}$ de mulțimi elementare deschise a căror reuniune să conțină mulțimea A , astfel ca

$$\sum_1^\infty \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

La fel există mulțimea închisă F astfel ca

$$\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$$

și cum mulțimea F este compactă

$$F \subset A_1 \cup \dots \cup A_N.$$

Rezultă

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \dots \cup A_N) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_1^N \mu(A_n) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

rezultă astfel că $\mu^*(A) = \mu(A)$, când $A \in \mathcal{G}$.

Fie acum $E = \bigcup E_n$ și $\mu^*(E_n) < \infty$. Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar există acoperirea $\{A_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3$ a mulțimii E_n cu mulțimi elementare deschise astfel ca:

$$\sum_1^\infty \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(E_n) + 2^{-n} \cdot \varepsilon.$$

Atunci

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^\infty \sum_{k=1}^\infty \mu(A_{nk}) \leq \sum_1^\infty \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Definiția 4.5. Pentru orice 2 mulțimi A și $B \subset \mathbb{R}^n$

$$\text{fie} \quad d(A, B) = \mu^*(A \Delta B),$$

unde $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Vom spune că $A_n \rightarrow A$ dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, A) = 0$.

Dacă există un șir $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de mulțimi elementare astfel ca $A_n \rightarrow A$ spunem că mulțimea A este finit μ -măsurabilă și scriem $A \in \mathcal{M}^*(\mu)$.

Dacă A este reuniunea unui număr numerabil de mulțimi finit μ -măsurabile spunem că A este măsurabilă și notăm $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

Se poate arăta că mulțimea $\mathcal{M}(\mu)$ astfel construită este σ -algebră iar funcția μ^* este numerabil aditivă pe $\mathcal{M}(\mu)$.

În acest mod funcția de mulțime μ definită inițial pe $\mathcal{G}$ spunem că a fost prelungită la o funcție de mulțime numerabil aditivă pe σ -algebră $\mathcal{M}(\mu)$. μ astfel definit pe $\mathcal{M}(\mu)$ se numește măsura. În cazul particular când $\mu = m$ (pe $\mathcal{G}$) ea se numește măsura Lebesgue în $\mathbb{R}^n$.

Teoria măsurii constituie baza matematică pe care s-a dezvoltat „Teoria probabilităților” ramură de matematică în plină dezvoltare.

§ 6. INTEGRALE CU PARAMETRI

Fie funcția $u = f(x, y)$, $f : D = [a, b] \times [c, d]$ integrabilă în raport cu x pe $[a, b]$ pentru orice y , $c \leq y \leq d$. Integrala

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

este funcție de parametru y , $y \in [c, d]$ și se numește integrală cu parametru. Are loc

Teorema 1.6. Dacă funcția $f(x, y)$ este continuă în D ; $D : a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ atunci integrala

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

este o funcție continuă de y pe segmentul $[c, d]$.

Demonstrație. $f(x, y)$ este continuă în D , D compact deci $f(x, y)$ este uniform continuă. Rezultă că pentru $(\forall) \varepsilon > 0$

($\exists$) $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $(\forall) (x', y'), (x'', y'') \in D$ pentru care

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon), \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon)$$

să avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

În particular pentru $x' = x'' = x$, obținem că $(\forall) y', y'' \in (c, d)$ care verifică condiția

$$|y' - y''| < \delta(\varepsilon) \rightarrow |f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Putem scrie

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y'')| &= \left| \int_a^b [f(x, y') - f(x, y'')] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y'')| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

ceea ce arată continuitatea funcției $J(y)$ pe $[c, d]$.

Observație. În condițiile teoremei precedente funcția: $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx$ este continuă în intervalul închis

$$V : [a, b] \times [a, b] \times [c, d].$$

Această afirmație rezultă astfel: $f(x, y)$ este continuă în $[a, b] \times [c, d]$ deci există constanta C astfel ca $|f(x, y)| < C$ în $D = [a, b] \times [c, d]$.

Deci (V) (u', v', y') și (u'', v'', y'') din V are loc inegalitatea

$$\begin{aligned} |F(u', v', y') - F(u'', v'', y'')| &= \left| \int_{u'}^{v'} f(x, y) dx - \right. \\ &\quad \left. - \int_{u''}^{v''} f(x, y'') dx \right| \leq \left| \int_{u'}^{v'} (f(x, y') - f(x, y'')) dx \right| + \\ &\quad + \left| \int_{u'}^{u''} f(x, y'') dx \right| + \left| \int_{v'}^{v''} f(x, y'') dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{u'}^{v'} f(x, y') - f(x, y'') dx \right| + C |u' - u''| + C |v' - v''|. \end{aligned}$$

Fie punctul (u', v', y') fixat și $(u'', v'', y'') \rightarrow (u', v', y')$. Atunci termenul

$$\int_{u'}^{v'} (f(x, y') - f(x, y'')) dx$$

tinde la zero și deci:

$$F(u', v', y') \rightarrow F(u'', v'', y'').$$

În legătură cu derivarea integralelor cu parametru are loc

Teorema 2.6. Dacă $f(x, y)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ sînt conținute în $D = [a, b] \times [c, d]$

atunci integrala $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ este o funcție derivabilă în raport cu y , $y \in [c, d]$ și:

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

Demonstrație. Trebuie arătat că:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{J(y+h) - J(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx.$$

În baza teoremei creșterilor finite putem scrie:

$$\begin{aligned} \frac{J(y+h) - J(y)}{h} &= \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx = \\ &= \int_a^b \frac{\partial f(x, y+h^*)}{\partial y} dx, \quad 0 < h^* < h \end{aligned}$$

și astfel

$$\begin{aligned} \frac{J(y+h) - J(y)}{h} &= \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dx = \\ &= \int_a^b [f'_y(x, y+h^*) - f'_y(x, y)] dx. \end{aligned}$$

Deoarece f'_y este continuă în $[a, b] \times (c, d]$, f'_y este și uniform continuă și deci $(\forall) \varepsilon > 0 \ (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru $h < \delta(\varepsilon)$.

$$|f'_y(x, y+h) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

pentru $x \in [a, b]$ și orice $y, y+h \in (c, d)$.

Putem scrie

$$\begin{aligned} & \left| \frac{J(y+h) - J(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx \right| = \\ & = \left| \int_a^b [f'_y(x, y+h^*) - f'_y(x, y)] dx \right| \leq \\ & \leq \int_a^b |f'_y(x, y+h^*) - f'_y(x, y)| dx < \varepsilon \end{aligned}$$

pentru toți $h < \delta(\varepsilon)$.

În cazul în care integrala cu parametru are și limitele funcției de parametru respectiv demonstrăm:

Teorema 3.6. Fie $f(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ continue în $D = [a, b] \times [c, d]$ și $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ 2 funcții cu graficele în D diferențiabile. Atunci derivata funcției

$$J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx$$

există

$$J'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx + f(\psi(y), y) \psi'(y) - f(\varphi(y), y) \varphi'(y).$$

Demonstrație. Avem:

$$J(y) = F(\varphi(y), \psi(y), y)$$

unde

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx,$$

$a \leq u \leq b$, $a \leq v \leq b$, $c \leq y \leq d$, are derivate parțiale continue.

$$F_u = -f(u, y), F_v = f(v, y), F_y = \int_u^v f'_y(x, y) dx$$

Deoarece funcțiile $u = \varphi(y)$ și $v = \psi(y)$ sînt presupuse derivabile rezultă că F este derivabilă în raport cu y și aplicînd regula de derivare a unei funcții compuse rezultă

$$\begin{aligned} F'_y &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = -f(u, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} + f(v, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} + \\ &+ \int_u^v f'_y(x, y) dx \text{ unde } u = \varphi(y) \text{ și } v = \psi(y). \end{aligned}$$

În legătură cu integrarea unei funcții definite printr-o integrală cu parametru avem:

Teorema 1.6. Dacă funcția $f(x, y)$ este continuă în $D = [a, b] \times [c, d]$ atunci:

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Demonstrație. Să arătăm mai general că:

$$\int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dx = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy$$

pentru $a \leq t \leq b$.

$$\text{Să notăm } \varphi(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dx.$$

$$\psi(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Va fi suficient să arătăm că

$$\varphi'(t) = \psi'(t) \text{ pentru } a \leq t \leq b \text{ și } \varphi(a) = \psi(a).$$

Punînd $F(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$ punem $\varphi(t) = \int_c^d F(t, y) dy$ unde $F(t, y)$ este continuă în dreptunghiul $D^*: a \leq t \leq b, c \leq y \leq d$ și $F'_t(t, y) = f(t, y)$ continuă în condițiile teoremei anterioare. Astfel:

$$\varphi'(t) = \int_c^d F'_t(t, y) dy = \int_c^d f(t, y) dy.$$

Punînd $\xi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ obținem $\psi(t) = \int_a^t \xi(x) dx$ și în baza teoremelor demonstrate anterior

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \xi(x) dx = \xi(t) = \int_c^d f(t, y) dy.$$

De aici rezultă că $\varphi'(t) \equiv \psi'(t)$ pentru $a \leq t \leq b$ și cum $\varphi(a) = \psi(a)$ rezultă $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ pentru $a \leq t \leq b$ și deci $\varphi(b) = \psi(b)$.

Exemple. 1) Să se calculeze folosind derivarea în raport cu un parametru integrala

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx.$$

Considerăm integrala cu parametru

$$J(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2} dx.$$

Avem $J(0) = 0$, $J(1) = 1$

$$\begin{aligned}\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} &= \int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)} dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} = \\ &= \frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha \operatorname{arctg} \alpha}{1+\alpha^2}.\end{aligned}$$

Integrând acum în raport cu α

$$\begin{aligned}J(\alpha) &= \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} d\alpha + \int \frac{\alpha \operatorname{arctg} \alpha}{1+\alpha^2} d\alpha + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \alpha \cdot \ln(1+\alpha^2) + C\end{aligned}$$

Pentru $\alpha = 0$, $J(0) = 0$ deci $C = 0$.

Astfel pentru $\alpha = 1$

$$J(1) = I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

2) Să se calculeze folosind integrarea în raport cu parametru

$$I = \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx, a, b > 0.$$

Vom scrie pentru aceasta:

$$I = \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \left(\int_a^b x^y dy\right) dx = \int_a^b \left(\int_0^1 x^y \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx\right) dy$$

Am putut aplica teorema prin care se poate integra o integrală cu parametru deoarece funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right), & (x, y) \in (0, 1) \times [a, b] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă în $[0, 1] \times [a, b]$.

Calculăm

$$I_1 = \int_0^1 x^y \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx$$

facem $\ln x = t$, $x = e^t$, $dx = e^t dt$, $t \in (-\infty, 0)$

și

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)} \cos t \, dt = e^{t(y+1)} \sin t \Big|_{-\infty}^0 - \\
 &- \int_{-\infty}^0 (y+1) e^{t(y+1)} \sin t \, dt = - (y+1) \left[e^{-t(y+1)} \cos t \Big|_{-\infty}^0 + \right. \\
 &\left. + (y+1) \int_{-\infty}^0 e^{t(y+1)} \cos t \, dt \right] = (y+1) - (y+1)^2 I_1 \\
 I_1(1 + (y+1)^2) &= y+1, \quad I_1 = \frac{y+1}{1 + (y+1)^2}
 \end{aligned}$$

deci

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b \frac{y+1}{1 + (y+1)^2} dy = \frac{1}{2} \ln [(1+y)^2 + 1] \Big|_a^b = \\
 &= \frac{1}{2} \ln \frac{b^2 + 2b + 2}{a^2 + 2a + 2}.
 \end{aligned}$$

Exerciții propuse

1) Să se arate că $f(x) = x^2$ este integrabilă în raport cu

$$g(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \text{ și să se calculeze } \int_0^1 f \, dg. \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

2) Să se calculeze $\int_0^1 x^2 \, dg$ unde $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^3 E\left(\frac{1}{x}\right), & x \in (0, 1] \end{cases}$ unde E este partea întreagă a numărului $\frac{1}{x}$.

3) Să se calculeze cu ajutorul integralei,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \dots + n^k}{n^{k+1}}, \quad k > 0.$$

Să se calculeze cu aproximație $S = 1^5 + 2^5 + \dots + 100^5$.

4) Funcția $y = y(x)$ este definită implicit de ecuația

$$\int_0^y e^t \, dt + \int_0^x \cos t \, dt = 0$$

Să se calculeze y' .

5/ Să se determine extremele funcției

$$I(x) = \int_0^x t e^{-t^2} dt$$

6/ Să se calculeze următoarele integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t e^t \cos at dt, \int x^n \ln x dx, \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx, \int \frac{dx}{\sin x}, \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$$

7. Să se calculeze:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x}}, \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5} dx, \int \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x}} dx$$

$$\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx, \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}}, \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2} dx$$

8. Să se arate că

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(t^2+1)} = 1$$

9. Să se calculeze stabilind o formulă de recurență, integralele:

$$I_n = \int_{-1}^0 x^n e^x dx \quad \text{și} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$$

10. Să se arate că dacă f este periodică ($f(x+T) = f(x)$)

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

11. Să se calculeze folosind dezvoltarea în serie de puteri integralele:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx, \int_0^{0,5} e^{\sin x} dx, \int_0^1 x^x dx, \int_0^x e^{-t^2} dt$$

12. Fără a calcula integrala să se arate, că:

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

13) Să se calculeze aria elipsei

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

14. Să se calculeze volumul elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad R: \frac{4}{3} \pi abc$$

15. Să se determine aria obținută prin rotirea curbei $y = 2x - x^2$ în jurul axei Ox , $x \in [0, 2]$.

16) Să se calculeze masa unei bare de lungime $l = 10$ m dacă densitatea de masă variază după legea $\mu(x) = 6 + 0,3x$ unde x este distanța unui punct al bazei la capătul ei inferior.

17. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța:

$\vec{F} = (x^2 - x)\vec{i}$ când acesta își deplasează punctul de aplicație pe segmentul $[0, 2]$. $R: \frac{2}{3}$

18. Să se calculeze aria sectorului mărginit de curba $r = a(1 + \cos \theta)$.

$$R: \frac{3\pi a^2}{2}$$

19. Să se calculeze cu formula lui Simpson

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} \quad \text{alegînd } n = 10.$$

20. Să se calculeze

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} dx, \quad m, n \in \mathbb{N}$$

21. Să se calculeze

$$F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Considerînd-o integrală cu parametru.

22. Să se calculeze $F'(x)$ dacă

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+xy)}{y} dy$$

CAPITOLUL VI

INTEGRALE IMPROPRII

§ 1. DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALELOR IMPROPRII

S-a studiat noțiunea de integrală $\int_a^b f(x) dx$, unde s-a presupus intervalul de integrare $[a, b]$ compact, iar funcția f mărginită. Există probleme care conduc la extinderea noțiunii de integrală definită.

Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow (0, 1]$ definită de

$$f(x) = e^{-x}$$

Aria porțiunii din plan cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x = u$, $y = 0$ și graficul funcției f este dată de $\int_0^u e^{-x} dx = 1 - e^{-u}$. Este natural să considerăm aria cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y = 0$ și graficul funcției f ca fiind egală cu

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - e^{-u}) = 1.$$

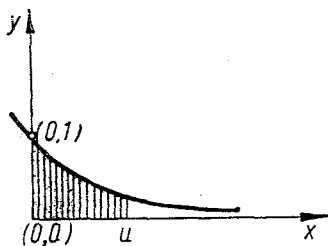


Fig. 24

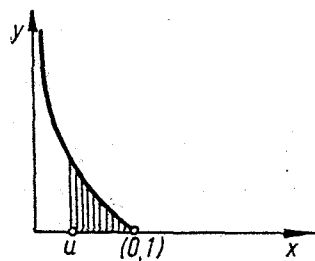


Fig. 25

Dacă considerăm funcția $f : [1, \infty) \rightarrow (0, 1]$ definită de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

atunci nu mai putem da un sens natural noțiunii de arie a porțiunii plane cuprinsă între dreptele $x = 1$, $y = 0$ și graficul funcției f , deoarece

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln u = \infty$$

Și alte probleme ne conduc la studiul existenței unor limite de forma

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx \quad (1); \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) dx \quad (2);$$

$$\lim_{\substack{u' \rightarrow \infty \\ u'' \rightarrow -\infty}} \left(\int_{u''}^{u'} f(x) dx + \int_a^{u'} f(x) dx \right) \quad (3)$$

Sîntem conduși în acest fel la:

Definiția 1.1. Fie f o funcție definită în $[a, \infty)$. Presupunem că f este integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, \infty)$. Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx.$$

Dacă $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, \infty)$ și punem prin definiție

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{u \rightarrow \infty} F(u)$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă.

Limitele de tipul (2) sau (3) conduc la integrale pe intervale de forma $(-\infty, a]$ sau $(-\infty, \infty)$ iar integralele corespunzătoare se notează

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx; \quad \int_{-\infty}^\infty f(x) dx$$

și pot fi aduse la integrale de tipul celei date în definiția 1.1. În adevăr, făcînd schimbarea de variabilă $x = -t$ obținem

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^a f(x) dx &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^a f(x) dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_{-u}^{-a} -f(-t) dt = \\ &= \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_{-a}^{-u} f(-t) dt = \int_{-a}^\infty f(-t) dt \end{aligned}$$

În mod asemănător obținem

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(-x) dx + \int_a^\infty f(x) dx.$$

Să considerăm acum funcția f definită prin

$$f(x) = -\ln x : (0, 1] \rightarrow [0, \infty)$$

dacă $u \in (0, 1]$ atunci aria porțiunii plane cuprinsă între dreptele $x = u$, $y = 0$ și graficul funcției f este dată de

$$F(u) = -\int_u^1 \ln x \, dx = (x - x \ln x) \Big|_u^1 = 1 - u + u \ln u$$

Funcția f nu este definită în 0 și nu putem pune problema integrabilității lui f pe $[0, 1]$.

În definiția integralei Riemann am presupus f mărginită pe $[a, b]$ iar în cazul nostru f nu este mărginită pe $(0, 1]$. Vom considera aria cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y = 0$ și graficul lui f ca fiind egală cu

$$\lim_{u \rightarrow 0} F(u) = \lim_{u \rightarrow 0} (1 - u + u \ln u) = 1$$

Și alte probleme ne conduc la studiul existenței unor limite de forma

$$\lim_{u \rightarrow b-0} \int_a^u f(x) \, dx \quad (1'); \quad \lim_{u \rightarrow a+0} \int_u^b f(x) \, dx \quad (2');$$

$$\lim_{\substack{u' \rightarrow a+0 \\ u'' \rightarrow b-0}} \left(\int_{u'}^c f(x) \, dx + \int_c^{u''} f(x) \, dx \right) \quad (3'); \quad a < c < b$$

Sîntem conduși în acest fel la:

Definiția 2.1. Fie f o funcție reală definită pe $[a, b)$. Presupunem că f este integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x) \, dx$$

dacă $\lim_{u \rightarrow b-0} F(u)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b)$ și punem prin definiție

$$\int_a^{b-0} f(x) \, dx = \lim_{u \rightarrow b-0} F(u)$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă.

Limitele de tipul (2') sau (3') conduc la integrale pe intervale de forma $(a, b]$ sau (a, b) iar integralele corespunzătoare se notează cu

$$\int_{a+0}^b f(x) \, dx; \quad \int_{a+0}^{b-0} f(x) \, dx.$$

Se arată, în mod asemănător ca mai sus, că aceste integrale pot fi aduse la integrale de tipul celei date în definiția 2.1. Pentru

$$\int_a^{b-0} f(x) dx; \int_{a+0}^b f(x) dx \text{ și } \int_{a+0}^{b-0} f(x) dx$$

se mai folosește notația

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Se vede imediat că dacă funcția f este definită și integrabilă pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe $[a, b)$ și integralele coincid.

Există funcții integrabile pe $[a, b)$ care nu sînt integrabile pe $[a, b]$. Pentru ca aceasta să se întîmple este necesar ca funcția f să fie nemărginită pe orice interval $[u, b)$ cu $a < u < b$.

Exemplu: fie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

După definiția 2.1 avem:

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{u \rightarrow 1-0} \int_0^u \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{u \rightarrow 1-0} 2(1 - \sqrt{1-u}) = 2.$$

Deci f este integrabilă pe $[0, 1)$ dar nu este integrabilă pe $[0, 1]$ deoarece este nemărginită pe $[0, 1]$.

Am abordat mai sus două probleme; aceea a integrabilității unei funcții pe un interval nemărginit și aceea a integrabilității unei funcții nemărginite. Fiecare dintre aceste probleme este un caz particular a unei probleme mai generale și anume aceea a integrabilității unei funcții pe un interval necompact $[a, b)$ (a finit, b finit sau infinit, $a < b$) în cazul în care funcția este integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Definiția 3.1. Fie f o funcție reală, definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx.$$

Dacă $\lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u < b}} F(u)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe intervalul necompact $[a, b)$, sau integrabilă impropriu pe $[a, b)$ și punem prin definiție

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u < b}} F(u)$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă.

Mai departe vom da o condiție necesară și suficientă de convergență a unei integrale. Pentru aceasta sînt necesare următoarele teoreme.

Teorema 1.1. Fie f o funcție reală definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și f integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă $a < c < b$, atunci integralele

$$\int_a^b f(x) dx, \int_c^b f(x) dx$$

sînt în același timp convergente sau în același timp divergente.

Demonstrație. Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx; \quad G(u) = \int_c^u f(x) dx;$$

$$A = \int_a^c f(x) dx.$$

Avem

$$F(u) = G(u) + A$$

de unde se vede că $\lim_{u \rightarrow b-0} F(u)$ există și este finită dacă și numai dacă $\lim_{u \rightarrow b-0} G(u)$ există și este finită.

Teorema 2.1. Fie f și g două funcții reale definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit), f și g integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă integralele

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{și} \quad \int_a^b g(x) dx$$

sînt convergente atunci și integrala $\int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx$ este convergentă, unde A și B sînt constante.

Demonstrație. În adevăr

$$\begin{aligned} \int_a^b (Af(x) + Bg(x)) dx &= \lim_{u \rightarrow b-0} \int_a^u (Af(x) + Bg(x)) dx = \\ &= A \lim_{u \rightarrow b-0} \int_a^u f(x) dx + B \lim_{u \rightarrow b-0} \int_a^u g(x) dx = \\ &= A \int_a^b f(x) dx + B \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

După cum se vede din definiția 3.1 convergența unei integrale revine la existența și finitudinea limitei funcției $F(u)$, în legătură cu care avem

Teorema 3.1. (Criteriul lui Cauchy-Bolzano). Fie F o funcție reală definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit). Pentru ca $\lim_{u \rightarrow b} F(u)$ să existe și să fie finită este necesar și suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel ca oricare ar fi u' și u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem

$$|F(u') - F(u'')| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Vom arăta mai întâi necesitatea condiției. Fie:

$$\lim_{u \rightarrow b-0} F(u) = l$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u cu $b_0(\varepsilon) < u < b$ să avem $|F(u) - l| < \varepsilon$. Fie u' și u'' astfel încît $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$. Avem

$$|F(u') - l| < \varepsilon \text{ și } |F(u'') - l| < \varepsilon$$

de unde rezultă

$$|F(u') - F(u'')| \leq |F(u') - l| + |F(u'') - l| < 2\varepsilon$$

și necesitatea condiției este demonstrată.

Arătăm suficiența condiției. Fie șirul (u_n) cu $u_n < b$ și $u_n \rightarrow b$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $b_0(\varepsilon) < u_n < b$. Fie $m > N(\varepsilon)$, avem $b_0(\varepsilon) < u_m < b$ și în baza ipotezei rezultă inegalitatea

$$|F(u_n) - F(u_m)| < \varepsilon.$$

Deci șirul $(F(u_n))$ satisface criteriul de convergență a lui Cauchy; există și este finită limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n)$$

Notăm cu l valoarea acestei limite. Dacă pentru orice alt subșir (u'_n) crescător și convergent la l avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u'_n) = l$$

atunci suficiența condiției este demonstrată.

Să presupunem, prin reducere la absurd că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u'_n) = l' \neq l$$

unde $l' \neq l$. Considerăm șirul

$$u_1, u'_1, u_2, u'_2, \dots, u_n, u'_n, \dots$$

Acest șir tinde la b dinspre stînga, deci șirul

$$F(u_1), F(u'_1), F(u_2), F(u'_2), \dots, F(u_n), F(u'_n), \dots$$

are limită finită. Fie l'' valoarea acestei limite. Deoarece un șir convergent are aceeași limită ca orice subșir al său iar șirurile $(F(u_n))$, $(F(u'_n))$ sînt subșiruri ale șirului cu limita l'' , rezultă că $l = l' = l''$. Contradicția obținută demonstrează teorema.

O condiție necesară și suficientă de convergență a unei integrale este dată de

Teorema 4.1. (Criteriul lui Cauchy). Fie funcția reală f definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și f integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. O condiție necesară și suficientă pentru convergența integralei

$$\int_a^b f(x) dx$$

este următoarea:

pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u' și u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem

$$\left| \int_{u'}^{u''} f(x) dx \right| < \varepsilon$$

Demonstrație. Considerăm funcția $F(u) = \int_a^u f(x) dx$. Convergența integralei $\int_a^b f(x) dx$ este echivalentă cu existența și finitudinea limitei $\lim_{u \rightarrow b} \int_a^u f(x) dx$. Observăm că $F(u') - F(u'') = \int_{u''}^{u'} f(x) dx$ și aplicînd criteriul Cauchy Bolzano funcției $F(u)$, rezultă demonstrația criteriului dat.

Definiția 4.1. Fie f o funcție definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$. Spunem că integrala $\int_a^b f(x) dx$ este absolut convergentă dacă $\int_a^b |f(x)| dx$ este convergentă.

Teorema 5.1. Fie f o funcție definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și f integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă integrala $\int_a^b f(x) dx$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstrație. Din criteriul lui Cauchy (necesitatea condiției) aplicat integralei $\int_a^b f(x) dx$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u' și u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem $\left| \int_{u'}^{u''} f(x) dx \right| < \varepsilon$

Dar $\left| \int_{u'}^{u''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{u'}^{u''} |f(x)| dx \right|$ și deci pe baza aceluiași criteriu (suficiența condiției) rezultă că integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă.

Observație. Pe un interval compact integrabilitatea lui f atrage după sine integrabilitatea lui $|f|$, dar nu și reciproc. Teorema 5.1 arată că pe un interval necompact din integrabilitatea lui $|f|$ rezultă integrabilitatea lui f . Reciproc nu este adevărat, adică din integrabilitatea lui f pe un interval necompact nu rezultă integrabilitatea lui $|f|$.

Definiția 5.1. O integrală improprie se numește semiconvergentă dacă este convergentă dar nu este absolut convergentă.

Vom da mai departe un exemplu de integrală semiconvergentă.

§ 2. INTEGRALE IMPROPRII DIN FUNCȚII POZITIVE

Ultima teoremă pune în evidență necesitatea studierii integralelor pe interval necompact în cazul în care funcția de sub semnul integrală este pozitivă.

Teorema 1.2. (Primul criteriu de comparație). Fie f și g două funcții reale definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Presupunem

$$1) \quad 0 \leq f(x) \leq g(x) \text{ pentru orice } x \in [a, b)$$

$$2) \quad \text{integrala } \int_a^b g(x) dx \text{ este convergentă.}$$

Atunci și integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă.

Demonstrație. Fie $u \in [a, b)$ din inegalitatea 1) și proprietatea de monotonie a integralei Riemann avem

$$F(u) = \int_a^u f(x) dx \leq \int_a^u g(x) dx \quad (3)$$

din $0 \leq g(x)$ și 2) rezultă

$$\int_a^u g(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (4)$$

din (3) și (4) obținem $F(u) \leq \int_a^b g(x) dx$

Prin urmare funcția F este mărginită pe $[a, b]$ și evident este crescătoare. Așadar $\lim_{u \rightarrow b-0} F(u)$ există, este finită și în plus

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Consecință. Fie f și g două funcții reale definite pe $[a, b]$ (b finit sau infinit) și integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b]$. Presupunem că:

1) $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$

2) integrala $\int_a^b f(x) dx$ este divergentă.

Atunci și integrala $\int_a^b g(x) dx$ este divergentă.

Demonstrația este imediată dacă ținem seama de primul criteriu de comparație.

Teorema 2.2. (Al doilea criteriu de comparație). Fie f și g două funcții reale definite pe $[a, b]$ (b finit sau infinit) și integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b]$. Presupunem că:

1) $f(x) > 0$ și $g(x) > 0$ pentru orice $x \in [a, b]$

$$2) \lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0; A \neq \infty \quad (5)$$

Atunci integralele $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b g(x) dx$ sînt în același timp convergente sau în același timp divergente.

Demonstrație: din (5) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < A$) există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi x cu

$$b_0(\varepsilon) < x < b \text{ să avem}$$

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon$$

Deoarece $g(x) > 0$, avem

$$(A - \varepsilon) g(x) < f(x) < (A + \varepsilon) g(x); \text{ cu } b_0(\varepsilon) < x < b \quad (6)$$

Pe baza teoremei 1.1. din convergența integralei $\int_a^b g(x) dx$ rezultă convergența integralei $\int_{b_0(\varepsilon)}^b g(x) dx$ care la rîndul său implică convergența integralei $\int_{b_0(\varepsilon)}^b (A + \varepsilon) g(x) dx$. Pe baza primului criteriu de comparație, ținînd

cont de (6), deducem că și integrala $\int_{b_0(z)}^b f(x) dx$ este convergentă, care la rândul său implică (pe baza teoremei 1.1.) convergența integralei $\int_a^b f(x) dx$. Dacă observăm că din (5) avem $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{A} > 0$, atunci procedînd în mod asemănător ca mai sus, convergența integralei $\int_a^b f(x) dx$ implică convergența integralei $\int_a^b g(x) dx$, deci cele două integrale converg în același timp.

În mod asemănător se arată că cele două integrale diverg în același timp.

Exemplu: Integrala $\int_1^2 \frac{dx}{x^\alpha (\ln x)^\beta}$ are aceeași natură cu integrala $\int_1^2 \frac{dx}{(\ln x)^\beta}$ deoarece în acest caz $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Un rol important în folosirea criteriilor de comparație îl joacă următoarele două integrale:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \begin{cases} \text{convergentă dacă } \alpha < 1 \\ \text{divergentă dacă } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \text{convergentă dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă dacă } \alpha \leq 1, a > 0 \end{cases}$$

În adevăr, pentru $\alpha \neq 1$, avem

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} &= \lim_{u \rightarrow b} \int_a^u \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = - \lim_{u \rightarrow b} \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_a^u = \\ &= - \frac{1}{1-\alpha} \lim_{u \rightarrow b} [(b-u)^{1-\alpha} - (b-a)^{1-\alpha}] = \begin{cases} \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha < 1 \\ \infty & \text{dacă } \alpha > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Pentru $\alpha = 1$, avem

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = \lim_{u \rightarrow b} \int_a^u \frac{dx}{b-x} = - \lim_{u \rightarrow b} \ln(b-x) \Big|_a^u = \infty$$

Pentru cea de a doua integrală avem în cazul $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} &= \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{u \rightarrow \infty} x^{1-\alpha} \Big|_a^u = \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{u \rightarrow \infty} (u^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}) = \begin{cases} \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha > 1 \\ \infty & \text{dacă } \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Pentru $\alpha = 1$, avem

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} (\ln u - \ln a) = \infty$$

Folosind aceste integrale avem următoarele două teoreme.

Teorema 3.2. Fie f o funcție reală pozitivă pe $[a, \infty)$, $a > 0$ și integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, \infty)$. Presupunem că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \cdot f(x) = A. \quad (7)$$

Atunci

1) dacă $\alpha > 1$ și $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^\infty f(x) dx$, converge

2) dacă $\alpha \leq 1$ și $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^\infty f(x) dx$, diverge.

Demonstrație. Din (7) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $b_0(\varepsilon)$ astfel încât oricare ar fi $x > b_0(\varepsilon)$ avem

$$A - \varepsilon < x^\alpha f(x) < A + \varepsilon$$

din ultima inegalitate, deoarece $x^\alpha > 0$, avem

$$\frac{A - \varepsilon}{x^\alpha} < f(x) < \frac{A + \varepsilon}{x^\alpha}; \quad x > b_0(\varepsilon)$$

Pentru $\alpha > 1$ și $0 \leq A < \infty$, ținând cont de inegalitatea din dreapta, integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ converge.

Pentru $\alpha \leq 1$ și $0 < A$, ținând cont de inegalitatea din stînga (cu $\varepsilon < A$), integrala $\int_a^\infty f(x) dx$ diverge.

Exemplu 1:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^3}} dx$$

Luăm $\alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon$; $\varepsilon > 0$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) x^{\frac{3}{2} - \varepsilon} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2} - \varepsilon} \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0$$

Putem alege $\varepsilon > 0$ așa fel încît $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$ și deci integrala este convergentă.

Exemplu 2:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Luăm $\alpha = 1$, atunci $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 1$ și deci integrala este divergentă.

Teorema 4.2. Fie f o funcție reală pozitivă pe $[a, b)$ și integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$. Presupunem că

$$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^{\alpha} f(x) = A \quad (8)$$

Atunci

1) dacă $\alpha < 1$ și $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^b f(x) dx$ converge

2) dacă $\alpha \geq 1$ și $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^b f(x) dx$ diverge

Demonstrație: Din (8) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$ astfel încât oricare ar fi x cu $b_0(\varepsilon) < x < b$ să avem

$$A - \varepsilon < (b-x)^{\alpha} f(x) < A + \varepsilon$$

din ultima inegalitate, deoarece $(b-x)^{\alpha} > 0$, avem

$$\frac{A - \varepsilon}{(b-x)^{\alpha}} < f(x) < \frac{A + \varepsilon}{(b-x)^{\alpha}}; \quad b_0(\varepsilon) < x < b$$

Pentru $\alpha < 1$ și $0 \leq A < \infty$, ținând cont de inegalitatea din dreapta, integrala $\int_a^b f(x) dx$ converge.

Pentru $\alpha \geq 1$ și $0 < A \leq \infty$, ținând cont de inegalitatea din stînga (cu $\varepsilon < A$), integrala $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

Exemplu 1:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luăm $\alpha = \frac{1}{2}$, atunci $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și deci integrala este convergentă.

Exemplu 2:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$$

Luăm $x = 1$, atunci $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}$ și deci integrala este divergentă.

§ 3. INTEGRALE IMPROPRII DIN FUNCȚII DE SEMN VARIABIL

Toate criteriile de convergență date pînă aici, cu excepția criteriului lui Cauchy, se referă la funcțiile pozitive. Vom da în continuare un criteriu de convergență pentru integrale, pe interval nemărginit, din funcții de semn variabil.

Teorema 1.3. (Criteriul lui Dirichlet). Fie f și g două funcții reale definite pe $[a, \infty)$. Dacă

- 1) funcția f este continuă și are o primitivă F mărginită pe $[a, \infty)$;
- 2) funcția g are derivata continuă pe $[a, \infty)$;
- 3) funcția g este monoton descrescătoare pe $[a, \infty)$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x) g(x) dx$ este convergentă.

Demonstrație: Din primele două ipoteze rezultă că funcția $f \cdot g$ este continuă $[a, \infty)$ și deci integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, \infty)$. Integrînd prin părți pe intervalul $[a, u]$ obținem

$$\begin{aligned} \int_a^u f(x) g(x) dx &= \int_a^u g(x) dF(x) = g(x) F(x) \Big|_a^u - \\ &- \int_a^u F(x) g'(x) dx = g(u) F(u) - g(a) F(a) - \int_a^u F(x) g'(x) dx \end{aligned}$$

Din ultimele două ipoteze deducem că $g \geq 0$ pe $[a, \infty)$. Funcția F fiind presupusă mărginită pe $[a, \infty)$, avem

$$|g(u) F(u)| \leq M g(u); \text{ unde } M = \sup |F(x)|$$

Pe baza ipotezei (4) obținem

$$\lim_{u \rightarrow \infty} |g(u) F(u)| \leq \lim_{u \rightarrow \infty} M g(u) = 0$$

Funcția g fiind presupusă monoton descrescătoare rezultă că $g' \leq 0$ pe $[a, \infty)$ de unde

$$\int_a^u |F(x) g'(x)| dx \leq M \int_a^u |g'(x)| dx = -M \int_a^u g'(x) dx = M(g(a) - g(u)) \leq M g(a).$$

În acest mod integrala $\int_a^u |F(x) g'(x)| dx$ este mărginită, de unde rezultă că integrala $\int_a^\infty F(x) g'(x) dx$ este absolut convergentă deci și convergentă. Prin urmare

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) g(x) dx \text{ există și este finită.}$$

Exemplu 1. Integrala $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ este convergentă. În adevăr, descompunem în sumă de două integrale:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = I_1 + I_2 \text{ unde } I_1 = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$I_2 = \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

Pentru a stabili convergența integralei I_1 este suficient să observăm că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ și deci putem prelungi funcția de sub semnul integrală la o funcție continuă pe $[0, 1]$. Fie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Funcția f este continuă pe $[0, 1]$ și deci integrabilă pe acest interval, de unde I_1 este convergentă. Pentru a stabili convergența integralei I_2 folosim criteriul lui Dirichlet unde $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$, funcții f și g satisfac condițiile cerute. În adevăr $|F(x)| = |-\cos x| \leq 1$ iar $g(x) = \frac{1}{x}$ este descrescătoare pe $[1, \infty)$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Exemplu 2. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, cu $\alpha > 0$, este convergentă. Dacă alegem $f(x) = \sin x$; $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$; $\alpha > 0$, condițiile criteriului lui Dirichlet sînt satisfăcute.

Exemplu 3. Integralele lui Fresnel $\int_0^\infty \sin x^2 dx$; $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ sînt convergente. Dacă considerăm prima integrală avem $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^1 \sin x^2 +$

$$+ \int_1^{\infty} \sin x^2 dx. \text{ Făcând schimbarea de variabilă } t = x^2 \text{ obținem } \int_1^{\infty} \sin x^2 dx = \\ = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \sin x^2 dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^{u^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Integrala $\int_1^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ este convergentă deci și integrala $\int_0^{\infty} \sin x^2 dx$ este convergentă. În mod asemănător se arată convergența integralei $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$.

Observație. Studiul convergenței integralelor pe interval mărginit din funcții nemărginite și de semn variabil se reduce la studiul convergenței integralelor pe interval nemărginit din funcții de semn variabil. În adevăr, să considerăm integrala $\int_a^b f(x) dx$; $-\infty < a < b < \infty$; cu f nemărginită și de semn variabil pe orice interval $[u, b] \subset [a, b]$. Făcând schimbarea de variabilă

$$x = \frac{bt + a}{t + 1}; \quad dx = \frac{b - a}{(t + 1)^2} dt; \text{ obținem}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u < b}} \int_a^u f(x) dx = \lim_{\substack{u \rightarrow b \\ u < b}} (b - a) \int_0^{\frac{u-a}{b-a}} f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right) \frac{dt}{(t + 1)^2} = \\ = (b - a) \int_0^{\infty} f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right) \frac{dt}{(t + 1)^2}.$$

§ 4. INTEGRALE IMPROPRII ȘI SERII NUMERICE

Fie f o funcție reală definită pe $[a, b]$ (b finit sau infinit) și integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b]$.

Fie $a = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k < \dots < b$, un șir crescător cu $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$.

Cu ajutorul șirului considerat putem defini seria numerică

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x) dx + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx \quad (1)$$

al cărui termen general este $u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx$.

Teorema 1.4. Dacă integrala $\int_a^b f(x) dx$ (2) este convergentă atunci și seria (1) este convergentă și are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx \quad (3)$$

Dacă f este pozitivă pe $[a, b]$ atunci este valabilă și afirmația reciprocă adică convergența seriei (1) implică convergența integralei (2).

Demonstrație. Pentru seria (1) avem

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx$$

și deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{b_0}^{b_n} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

adică convergența integralei (2) implică convergența seriei (1). În cazul în care f este pozitivă pe $[a, b]$ și seria (1) este convergentă notăm cu S suma sa. Pentru orice u cu $a < u < b$, putem găsi un $n = n(u)$ astfel încât $u < b_n$. Folosind faptul că $f(x) \geq 0$ avem:

$$0 \leq \int_a^u f(x) dx \leq \int_a^{b_n} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx \leq S,$$

adică funcția $F(u) = \int_a^u f(x) dx$, este mărginită pe $[a, b]$. Pe de altă parte funcția $F(u)$ este monoton crescătoare și deci $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \int_a^b f(x) dx$, există și este finită.

Observații:

1) Dacă funcția f nu păstrează semn constant pe $[a, b]$, atunci convergența seriei (1) nu implică totdeauna convergența integralei (2). *Exemplu:*

$$\text{Seria } \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x dx = - \sum_{k=0}^{\infty} \cos x \Big|_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} = - \sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

este convergentă dar integrala $\int_0^{\infty} \sin x dx$ este divergentă, deoarece $\int_0^{\infty} \sin x dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \sin x dx = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - \cos u)$, nu există.

2) Dacă seria (1) este, convergentă pentru orice șir (b_n) cu $b_n < b$, atunci rezultă și convergența integralei (2) chiar dacă f nu este pozitivă pe $[a, b]$.

3) Exemplu de integrală semiconvergentă.

Vom arăta că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ nu este absolut convergentă. Pentru aceasta vom reduce studiul integralei $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ la studiul unei serii numerice. Avem egalitatea

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = n\pi + t$ obținem

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx = \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt. \text{ Avem deci}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t} dt \geq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\pi(n+1)} \int_0^\pi \sin t dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Cum seria $\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1}$ este divergentă, folosind partea a doua a teoremei

1.4. deducem că integrala $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ este divergentă.

Teorema 2.4. (Criteriul integral al lui Cauchy). Fie f o funcție reală, pozitivă și descrescătoare pe $[1, \infty)$, atunci seria

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \quad (3)$$

este convergentă dacă și numai dacă integrala

$$\int_1^\infty f(x) dx \quad (4)$$

este convergentă.

Demonstrație. Funcția f fiind descrescătoare pe $[1, \infty)$ este integrabilă pe orice interval compact $[1, u] \subset [1, \infty)$. Dacă $k < x < k+1$, deoarece f este descrescătoare, avem

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1) \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

de unde deducem

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Sumând după k de la 1 la n obținem

$$\sum_{k=1}^n f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{k=1}^n f(k+1) \quad (5)$$

Dacă notăm $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, inegalitatea (5) devine

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx \geq S_{n+1} - f(1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

Presupunem integrala (4) convergentă și să arătăm că seria (3) este convergentă. Funcția f fiind pozitivă are loc inegalitatea

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq \int_1^{\infty} f(x) dx; \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Folosind inegalitățile (6) și (7) obținem:

$$S_{n+1} \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

adică șirul sumelor parțiale (S_n) al seriei (3) este mărginit. Pe de altă parte șirul (S_n) este crescător (deoarece f este pozitivă) și deci convergent. Prin urmare convergența integralei (4) implică convergența seriei (3).

Presupunem seria (3) convergentă și fie S suma sa. Are loc inegalitatea $S_n \leq S$, pentru $n = 1, 2, \dots$, de unde deducem folosind inegalitatea (6) că

$$\int_1^{n+1} f(x) dx \leq S$$

Pentru orice $u \in [1, \infty)$ putem găsi un $n = n(u)$ astfel încât $u < n(u)$. Funcția f fiind pozitivă deducem că

$$F(u) = \int_1^u f(x) dx \leq \int_1^n f(x) dx \leq S$$

adică funcția $F(u)$ este mărginită.

Funcția $F(u)$ fiind crescătoare (deoarece f este pozitivă) și mărginită pe $[1, \infty)$ rezultă că

$$\lim_{u \rightarrow \infty} F(u) = \int_1^{\infty} f(x) dx$$

există și este finită. Prin urmare convergența seriei (3) implică convergența integralei (4).

Exemplu 1. 1) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeași natură cu integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \begin{cases} \text{convergentă dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Observație. Dacă există un număr natural n_0 astfel încât pe intervalul $[n_0, \infty)$ funcția f este pozitivă și descrescătoare, atunci seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ este convergentă dacă și numai dacă integrala $\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$ este convergentă.

Exemplu 2. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ are aceeași natură cu integrala

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} \begin{cases} \text{convergentă dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă dacă } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

§ 5. CONVERGENȚA INTEGRALELOR IMPROPRII ÎN SENSUL VALORII PRINCIPALE

Am studiat pînă acum noțiunea de integrală pe intervale deschise sau nemărginite la unu sau ambele extremități ale intervalului. Se întîlnesc cazuri cînd $f: [a, b] - \{c\}$, unde $c \in (a, b)$ și f nemărginită pe $[a, c)$ și $(c, b]$. Presupunem f integrabilă pe orice compact $[a, c - u'] \subset [a, c)$ și $[c + u'', b] \subset (c, b]$.

Definiția 1.5. În condițiile de mai sus punem

$$F(u', u'') = \int_a^{c-u'} f(x) dx + \int_{c+u''}^b f(x) dx$$

Dacă $\lim_{\substack{u' \rightarrow 0 \\ u'' \rightarrow 0}} F(u', u'')$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b]$ și punem prin definiție

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{u' \rightarrow 0 \\ u'' \rightarrow 0}} F(u', u'')$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă. Vom introduce acum o noțiune de integrabilitate mai generală decît cea dată prin definiția 1.5.

Fie $f: [a, b] - \{c\} \rightarrow \mathbf{R}$, $c \in (a, b)$, f nemărginită pe intervalele $[a, c)$ și $(c, b]$. Presupunem f integrabilă pe orice interval compact $[a, c - u] \subset [a, c)$ sau $[c + u, b] \subset (c, b]$.

Definiția 2.5. În condițiile de mai sus punem

$$F(u) = \int_a^{c-u} f(x) dx + \int_{c+u}^b f(x) dx$$

Dacă $\lim_{u \rightarrow 0} F(u)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b]$ în sensul valorii principale. Valoarea acestei limite se notează cu V.p. $\int_a^b f(x) dx$ și se numește integrala în sensul valorii principale a funcției f pe $[a, b]$.

Se vede imediat că dacă integrala $\int_a^b f(x) dx$ este convergentă atunci funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ în sensul valorii principale. Reciproc nu este adevărat așa cum se vede din următorul exemplu. Fie $c \in (a, b)$ și considerăm integrala

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{u' \rightarrow 0} \int_a^{c-u'} \frac{dx}{x-c} + \lim_{u'' \rightarrow 0} \int_{c+u''}^b \frac{dx}{x-c} = \\ &= \lim_{u' \rightarrow 0} \ln |x-c| \Big|_a^{c-u'} + \lim_{u'' \rightarrow 0} \ln |x-c| \Big|_{c+u''}^b = \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{u' \rightarrow 0 \\ u'' \rightarrow 0}} \ln \frac{u'}{u''} \end{aligned}$$

Ultima limită nu există când $u' \rightarrow 0$ și $u'' \rightarrow 0$ independent una de alta. Dar

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-u} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+u}^b \frac{dx}{x-c} \right] = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left[\ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{u}{u} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a}. \end{aligned}$$

Vom considera, în încheiere, cazul unei funcții reale definite pe $(-\infty, \infty)$.

Definiția 3.5. Fie f o funcție reală definită pe $\mathbf{R}$ și f integrabilă pe orice interval compact din $\mathbf{R}$. Să punem

$$F(u', u'') = \int_{u'}^a f(x) dx + \int_a^{u''} f(x) dx; a \in \mathbf{R}$$

Dacă $\lim_{\substack{u' \rightarrow -\infty \\ u'' \rightarrow \infty}} F(u', u'')$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe axa reală și punem prin definiție

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{u' \rightarrow -\infty \\ u'' \rightarrow \infty}} F(u', u'').$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă se numește divergentă.

Definiția 4.5. Fie f o funcție reală definită pe $\mathbf{R}$ și integrabilă pe orice interval compact $[-u, u] \subset \mathbf{R}$, $u > 0$. Să punem

$$F(u) = \int_{-u}^u f(x) dx$$

Dacă $\lim_{u \rightarrow \infty} F(u)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $\mathbf{R}$

în sensul valorii principale. Valoarea acestei limite se notează cu $\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$

și se numește integrala în sensul valorii principale a funcției f pe $\mathbf{R}$.

Se vede imediat că, dacă integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ converge, atunci funcția f este integrabilă pe $\mathbf{R}$ în sensul valorii principale. Reciproc nu este adevărat așa cum se vede din următorul exemplu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim_{\substack{u' \rightarrow -\infty \\ u'' \rightarrow \infty}} \int_{u'}^{u''} \frac{2x dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{u' \rightarrow -\infty \\ u'' \rightarrow \infty}} \ln \frac{(u'')^2+1}{(u')^2+1}.$$

Această limită nu există când $u' \rightarrow -\infty$ și $u'' \rightarrow \infty$. Dar

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u \frac{2x dx}{x^2+1} = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln \frac{u^2+1}{u^2+1} = 0.$$

§ 6. INTEGRALE IMPROPRII CU PARAMETRU

Fie funcția reală f definită pe $I \times [c, d]$ unde $I = [a, b]$ este un interval necompact. Presupunem că pentru fiecare $y \in [c, d]$ integrala

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (1)$$

este convergentă. Vom da în continuare condiții de continuitate și derivabilitate pentru funcția F . Pentru a da aceste condiții introducem noțiunea de integrală convergentă uniform.

Definiția 1.6. Spunem că integrala (1) converge uniform în raport cu $a \in [c, d]$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u cu $b_0(\varepsilon) < u < b$ să avem

$$\left| \int_a^u f(x, y) dx - F(y) \right| < \varepsilon \quad (2)$$

pentru orice $y \in [c, d]$

Exemple de integrale convergente care nu converg uniform.

Exemplu 1. Integrala $F(y) = \int_0^\infty ye^{-xy} dx$ converge pentru fiecare $y \in [0, 1]$ dar nu converge uniform în raport cu $y \in [0, 1]$. Pentru $y = 0$ avem $F(0) = 0$. Pentru $y \in (0, 1]$, facem schimbarea de variabilă $xy = t$ și obținem

$$F(y) = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u ye^{-xy} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{yu} e^{-t} dt = \lim_{u \rightarrow \infty} [1 - e^{-yu}] = 1.$$

Inegalitatea (2) devine în acest caz

$$\left| \int_0^u ye^{-xy} dx - 1 \right| < \varepsilon \Rightarrow e^{-yu} < \varepsilon \Rightarrow u > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y}; \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Prin urmare inegalitatea (2) are loc dacă $u > b_0(\varepsilon, y) = \frac{-\ln \varepsilon}{y}$ și deci integrala considerată nu converge uniform în raport cu $y \in [0, 1]$.

Exemplu 2. Procedînd la fel ca în exemplu 1 se arată că integrala $F(y) = \int_0^1 yx^{y-1} dx$, converge pentru fiecare $y \in [0, 1]$ dar nu converge uniform în raport cu $y \in [0, 1]$.

Între convergența uniformă a unei integrale improprie cu parametru și convergența uniformă a unei serii de funcții există o strînsă legătură dată de teorema care urmează.

Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$, un șir crescător cu $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$. Cu ajutorul șirului considerat putem defini seria de funcții

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x, y) dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x, y) dx + \dots + = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \quad (3)$$

unde

$$u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y) dx$$

Teorema 1.6. Dacă integrala (1) este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$, atunci și seria de funcții (3) este convergentă uniform pe $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x, y) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y) dx$$

Demonstrație. Integrala (1) fiind uniform convergentă în raport cu $y \in [c, d]$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u cu $b_0(\varepsilon) < u < b$ să aibă loc inegalitatea (2), pentru orice $y \in [c, d]$. Șirul (b_n) fiind crescător și convergent la b , rezultă că există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $b_0(\varepsilon) < b_n < b$. Din convergența uniformă a integralei (1) rezultă că pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$\left| \int_a^{b_n} f(x, y) dx - F(y) \right| < \varepsilon \quad (4)$$

pentru orice $y \in [c, d]$. Termenul general al șirului sumelor parțiale pentru seria (3) este

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k(y) = \int_a^{b_n} f(x, y) dx$$

Inegalitatea (4) fiind adevărată pentru $n > N(\varepsilon)$ și orice $y \in [c, d]$ rezultă convergența uniformă a seriei (3) la $F(y)$ pe intervalul $[c, d]$.

Observație. Dacă seria (3) este convergentă uniform pe intervalul $[c, d]$ pentru orice șir (b_n) cu $b_n \rightarrow b$, atunci și integrala (1) este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Teorema 2.6. Fie funcția reală f definită și continuă pe $I \times [c, d]$, unde $I = [a, b)$ este interval necompact. Dacă integrala

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$ atunci funcția $F(y)$ este continuă pe intervalul $[c, d]$.

Demonstrație. Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$ un șir crescător cu $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$. Avem

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \text{ unde } u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y) dx$$

Din continuitatea lui f pe $I \times [c, d]$ rezultă continuitatea lui u_k pe $[c, d]$ pentru $k = 0, 1, 2, \dots$

Convergența uniformă a integralei din enunț, pe baza teoremei 1.6, implică convergența uniformă a seriei de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(y)$, pe intervalul $[c, d]$. Folosind un rezultat de la seriile de funcții deducem continuitatea lui F pe $[c, d]$.

Teorema 3.6. Fie funcția reală f definită și continuă pe $I \times [c, d]$ unde $I = [a, b)$ este un interval necompact. Dacă

1) f'_y există și este continuă pe $I \times [c, d]$

2) integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ este convergentă

3) integrala $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Atunci funcția F este derivabilă pe $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Demonstrație. Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$ un șir crescător cu $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$. Avem

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \text{ unde } u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y) dx$$

Din ipoteza a doua deducem că seria de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ este convergentă pentru $y \in [c, d]$ și are suma $F(y)$.

Teorema de derivare a integralelor funcției de un parametru ne dă egalitatea

$$u'_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f'_y(x, y) dx; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

și asigură continuitatea lui $u'_k(y)$ pe intervalul $[c, d]$. Din convergența uniformă a integralei $\int_a^b f'_y(x, y) dx$, în raport cu $y \in [c, d]$, deducem convergența uniformă a seriei de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} u'_k(y)$ pe intervalul $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^{\infty} u'_k(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Folosind un rezultat stabilit la seriile de funcții deducem că funcția F este derivabilă pe intervalul $[c, d]$ și are derivata continuă dată de egalitatea

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y) dx$$

Vom da în continuare un criteriu de convergență uniformă a integralelor improprii cu parametru.

Teorema 4.6. (Criteriul lui Weierstrass).

Fie o funcție reală f definită pe $I \times [c, d]$ unde $I = [a, b)$ este un interval necompact. Presupunem că

1) $F(u, y) = \int_a^u f(x, y) dx$ există pentru orice $u \in [a, b)$ și orice $y \in [c, d]$.

2) există o funcție pozitivă g definită pe $[a, b)$ astfel încît

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

pentru orice $x \in [a, b)$ și orice $y \in [c, d]$.

3) integrala $\int_a^b g(x) dx$ este convergentă.

Atunci $\int_a^b f(x, y) dx$ este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Demonstrație: Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$ un șir crescător cu $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b$. Cu ajutorul șirului considerat definim seria de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(y)$

unde $u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y) dx$ și seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ unde

$$a_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} g(x) dx.$$

Din prima proprietate a funcției g rezultă că pentru orice $y \in [c, d]$ are loc inegalitatea

$$|u_k(y)| \leq a_k \quad (\forall) y \in [c, d]$$

Din cea de a doua proprietate a funcției g deducem că seria $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ este convergentă. Folosind criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă a seriilor de funcții deducem convergența uniformă a seriei $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ pe intervalul $[c, d]$.

Seria de funcții $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ fiind convergentă uniform pentru orice șir (b_n) , rezultă că integrala din enunțul teoremei este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Exemplu. Considerăm integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \quad (\alpha > 0)$$

În cazul de față nu putem aplica rezultatul stabilit la teorema 3.6 deoarece derivînd în raport cu parametrul α , obținem integrala divergentă:

$$\int_0^{\infty} \cos \alpha x \, dx$$

Vom considera integrala

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx \quad (\beta > 0)$$

Derivînd în raport cu α obținem integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$$

care este uniform convergentă în raport cu α deoarece este majorată de integrala convergentă

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x} \, dx \quad (\beta > 0)$$

Se obține, pentru $\alpha \geq 0$,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Integrînd în raport cu α , avem

$$I_1 = \arctg \frac{\alpha}{\beta}$$

(constanta de integrare este în acest caz egală cu zero).

Dar integrala I_1 este convergentă uniform în raport cu β pentru $\beta \geq 0$. Teorema 2.6 ne asigură continuitatea lui I_1 și pentru $\beta = 0$, adică $I = \lim_{\beta \rightarrow 0} I_1$.

Pentru $\alpha > 0$ avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \lim_{\beta \rightarrow 0} \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

În cazul particular $\alpha = 1$ avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

§ 7. INTEGRALELE LUI EULER

Integrala lui Euler de speța a doua sau funcția $\Gamma(p)$ este definită pentru $p > 0$ prin egalitatea

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx \quad (1)$$

Pentru a arăta convergența integralei (1), în cazul $p > 0$, folosim descompunerea

$$\Gamma(p) = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Integrala $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ este convergentă (vezi teorema 4.2), pentru $1 - p < 1$,

deci pentru $0 < p$. Pentru integrala $\int_1^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$ ținem seama de inegalitatea

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \text{ sau } e^{-x} < \frac{n!}{x^n}; \text{ de unde}$$

$$x^{p-1} e^{-x} < \frac{n!}{x^{n+1-p}}$$

Dacă luăm $n > p$ atunci, folosind primul criteriu de comparație avem

$$\int_1^\infty x^{p-1} dx < n! \int_1^\infty \frac{dx}{x^{n+1-p}},$$

unde integrala din dreapta este convergentă deoarece $\alpha = n + 1 - p > 1$.

Integrând prin părți în (1) obținem:

$$\Gamma(p+1) = \int_0^\infty x^p e^{-x} dx = -x^p e^{-x} \Big|_0^\infty + p \cdot \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx, \text{ adică}$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (2)$$

Relația (2) ne conduce la relația

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2) \dots (p+1)p \cdot \Gamma(p) \quad (3)$$

Dacă $p = 1$, avem $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ și folosind relația (3) obținem

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n!$$

adică funcția $\Gamma(p)$ ia valoarea $n!$ pentru $p = n + 1$ iar pentru $p > 0$, $p \neq n + 1$, extrapolează factorialul.

Integrala lui Euler de prima speță sau funcția $B(p, q)$ este definită pentru $p > 0$ și $q > 0$ prin egalitatea

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad (4)$$

Pentru $p \geq 1$ și $q \geq 1$, funcția de sub semnul integrală este continuă pe intervalul $[0, 1]$ și deci integrala are sens chiar pe $[0, 1]$. Dacă $p < 1$ sau $q < 1$ procedăm în modul următor: dacă $p < 1$ atunci integrala

$$\int_0^1 \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} dx$$

este convergentă pentru $1 - p < 1$, deci pentru $p > 0$. Dacă $q < 1$ atunci integrala

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}} dx$$

este convergentă pentru $1 - q < 1$, deci pentru $q > 0$. Prin urmare integrala (4) este convergentă pentru $p > 0$ și $q > 0$. Funcția $B(p, q)$ are proprietatea de a fi simetrică în p și q adică

$$B(p, q) = B(q, p) \quad (5)$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = 1 - t$, rezultă imediat egalitatea (5).

În legătură cu funcțiile $\Gamma(p)$ și $B(p, q)$ dăm două relații care deseori sînt întîlnite în aplicații. Între aceste două funcții există legătura

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (6)$$

care va fi demonstrată cu ajutorul integralei duble improprii.

Funcția $\Gamma(p)$ satisface egalitatea

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \text{ unde } 0 < p < 1 \quad (7)$$

Dacă în formula (6) facem $p = q = \frac{1}{2}$, obținem

$$B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}, \text{ de unde rezultă}$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

În ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x = \sin^2 t$ și atunci obținem

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t \cos t} dt = \pi \text{ și deci } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Dacă ținem seama de definiția funcției $\Gamma(p)$ avem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

și facem schimbarea de variabilă $x = t^2$, rezultă

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \text{ (integrala Euler-Poisson)}$$

Exemple.

1) Să se calculeze $\int_0^{\infty} e^{-x^p} dx$, $p > 0$. Dacă facem schimbarea de variabilă $y = x^p$ atunci $dy = px^{p-1} dx$; $dx = \frac{1}{p} y^{\frac{1}{p}-1} dy$.

$$\text{Avem } \int_0^{\infty} e^{-x^p} dx = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{1}{p}-1} dy = \frac{1}{p} \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right).$$

2) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx$; $p > 0$; $q > 0$. Facem schimbarea de variabilă $y = \sin^2 x$; $dy = 2 \sin x \cdot \cos x dx$ și obținem

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 y^{\frac{p}{2}-1} \cdot (1-y)^{\frac{q}{2}-1} dy = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \end{aligned}$$

În cazul particular $q = 1$, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

3) Să se arate că $B(p, q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$.

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{y+1}$ în (4) și ținem cont că $dx = \frac{dy}{(y+1)^2}$ obținem

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{y+1}\right)^{p-1} \frac{1}{(y+1)^{q-1}} \frac{dy}{(y+1)^2} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(y+1)^{p+q}} dy. \end{aligned}$$

4) Să se calculeze $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2} dx$

Dacă folosim relația de la exercițiul (3), avem

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2} dx &= B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1+1)} = \\ &= \frac{\frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1 \cdot \Gamma(1)} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

Probleme

Să se arate că următoarele integrale sînt convergente și apoi să se calculeze:

$$1) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} \quad R: \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$2) \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx; \quad (a > 0) \quad R: \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} \, dx; \quad R: 1$$

$$4) \int_0^{\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^3} \, dx; \quad R: -\frac{1}{8}$$

$$5) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^3} \quad R: \frac{1}{2(\ln 2)^2}$$

$$6) \int_1^2 \frac{dx}{x \sqrt{3x^2 - 2x - 1}}; \quad R: \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{3}{4}$$

$$7) \int_0^1 \frac{(\arcsin x)^n}{\sqrt{1-x^2}} \, dx; \quad R: \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n+1} : n \neq -1$$

$$8) \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx; \quad R: I_1 = I_2 = -\frac{\pi}{2} \ln 2$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx;$$

$$9) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad R: \pi$$

$$10) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x} dx; n \in \mathbb{N};$$

$$R: \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$$

11) Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha}}; R: \text{dacă } \alpha > 1 \text{ seria este convergentă}$$

Să se calculeze în sensul valorii principale următoarele integrale

$$12) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3 + x}; R: 0$$

$$13) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1} dx; R: \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$$

14) Dacă f este o funcție reală definită și continuă pe $[0, \infty)$ și limita $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ există și este finită atunci următoarea integrală există și valoarea sa este dată de formula (lui Froullani)

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - A] \ln \frac{b}{a}; a > 0; b > 0$$

Dacă $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ nu există dar integrala $\int_c^{\infty} \frac{f(x)}{x} dx; c > 0$ este convergentă atunci

$$\int_0^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \cdot \ln \frac{b}{a}.$$

Folosind formula lui Froullani să se calculeze următoarele integrale

$$15) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx; a > 0; b > 0 \quad R: \ln \frac{b}{a}.$$

$$16) \int_0^{\infty} \ln \frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}} dx; a > 0; b > 0; p > 0; q > 0$$

$$R: \left(\ln \frac{p+q}{p} \right) \ln \frac{b}{a}$$

$$17) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx; a > 0; b > 0 \quad R: \ln \frac{b}{a}$$

$$18) \int_0^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x} dx; a \cdot b \neq 0 \quad R: \ln \left| \frac{b}{a} \right|$$

Folosind teorema de derivare a unei integrale improprii funcție de un parametru, să se calculeze următoarele integrale

$$19) \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx; \quad a > 0; \quad b > 0 \quad m \neq 0;$$

$$R: \arctg \frac{a}{m} - \arctg \frac{b}{m}$$

$$20) \int_0^{\infty} \frac{\ln(a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} dx; \quad b \neq 0;$$

$$R: \frac{\pi}{|b|} \ln(|a| + |b|)$$

$$21) \int_0^{\infty} \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx; \quad |a| < 1;$$

$$R: -\pi(1 - \sqrt{1 - a^2})$$

$$22) \int_0^1 \frac{\ln(1 - a^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad |a| < 1;$$

$$R: \ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$$

Folosind integralele lui Euler să se calculeze următoarele integrale

$$23) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$$

$$R: \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$$

$$24) \int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$$

$$R: \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$25) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}$$

$$R: \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$$

$$26) \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x} \right)^p dx; \quad (p > -1)$$

$$R: \Gamma(p + 1)$$

Să se arate următoarele egalități

$$27) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{4};$$

$$28) \int_0^{\infty} e^{-x^4} dx \cdot \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$$

CAPITOLUL VII

INTEGRALE CURBILINII

§ 1. DRUMURI

Definiție:

Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$ un interval compact. O funcție continuă $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ se numește drum parametrizat în spațiu de capete $\gamma(a), \gamma(b)$.

Rezultă deci că există trei funcții reale f, g, h definite și continue pe $[a, b]$ astfel încât

$$\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t)); t \in [a, b].$$

Se numește imaginea drumului γ , mulțimea din spațiu

$$I(\gamma) = \{\gamma(t); t \in [a, b]\} = \{(f(t), g(t), h(t)); t \in [a, b]\}$$

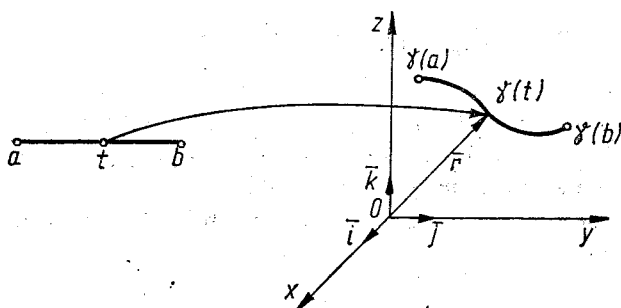


Fig. 26.

Dacă notăm cu $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ vectorul de poziție al unui punct M aparținând lui $I(\gamma)$, prin identificare obținem

$$x = f(t), y = g(t); z = h(t); t \in [a, b] \quad (1)$$

Ansamblul acestor trei funcții se numește o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma)$, iar t se numește parametru.

Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ spunem că drumul este închis.

Dacă există două valori t' și t'' astfel încât $a \leq t' < t'' \leq b$, $\gamma(t') = \gamma(t'')$ și astfel încât cel puțin una dintre inegalitățile $a < t'$ și $t'' < b$ să fie satisfăcută, spunem că punctul $\gamma(t')$ este punct multiplu al drumului.

Dacă drumul γ nu admite nici un punct multiplu spunem că este drum simplu.

Dacă funcțiile f, g, h admit derivate continue pe $[a, b]$ și $f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t) > 0, \forall t \in [a, b]$ spunem că drumul γ este neted.

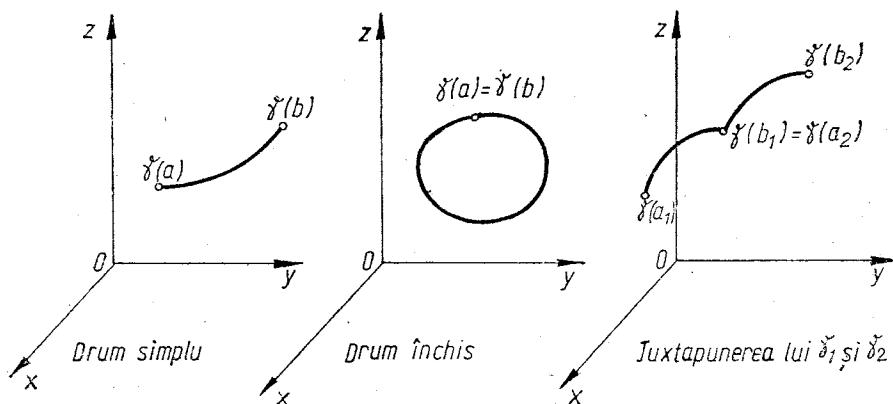


Fig. 27.

Drumurile $\gamma_1: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{R}^3$ și $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{R}^3$ se numesc juxtapozabile dacă $b_1 = a_2$ și $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.

În acest caz drumul $\gamma: [a_1, b_2] \rightarrow \mathbf{R}^3$ definit prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{dacă } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t) & \text{dacă } t \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

se numește juxtapunerea drumurilor γ_1 și γ_2 și se notează $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$

Un drum $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ se numește neted pe porțiuni dacă el este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

În fig. 27 sînt ilustrate imagini ale diferitelor tipuri de drumuri.

§ 2. DRUMURI RECTIFICABILE

Fie γ un drum parametrizat din spațiu și fie

$$d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$$

o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Punctele

$$A = M_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0)), \dots, M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i)), \dots,$$

$$M_n(f(t_n), g(t_n), h(t_n)) = B$$

determină o linie poligonală ale cărei vîrfuri aparțin lui $I(\gamma)$ iar M_0 și M_n coincid cu capetele drumului.

Lungimea acestei linii poligonale, pe care o notăm l_a , este

$$l_a = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2}$$

Dacă înlocuim diviziunea d cu o diviziune mai fină atunci l_a crește.

Definiție: Drumul γ se numește rectificabil dacă mulțimea (l_a) este majorată. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește lungimea drumului γ și se notează $l(\gamma)$.

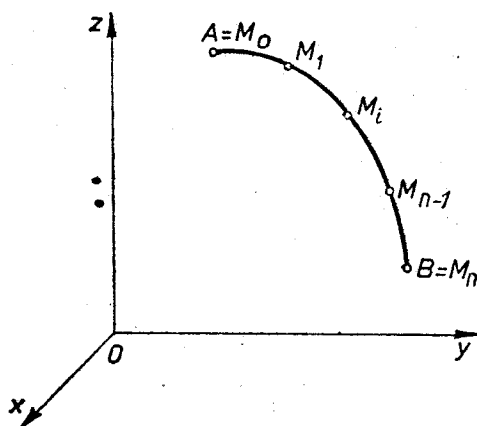


Fig. 28.

Deci $l(\gamma) = \sup l_a$; $d \in \mathfrak{D}$, unde $\mathfrak{D}$ este mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Dintre drumurile rectificabile cel mai des întâlnite sînt cele netede, în legătură cu care avem următoarea

Teoremă 1.2.

Un drum neted are lungime. Dacă $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$; $t \in [a, b]$ (1) este o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma)$ atunci are loc egalitatea

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2} dt \quad (2)$$

Demonstrație. Fie $d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ și

$$l_a = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2}$$

lungimea liniei poligonale determinată de punctele $M_0, M_1, \dots, M_i, \dots, M_n$.

Aplicînd formula de medie a lui Lagrange pentru funcțiile f, g, h pe fiecare subinterval $[t_i, t_{i+1}] \subset [a, b]$ obținem

$$l_a = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i) + h'^2(\zeta_i)} (t_{i+1} - t_i) \text{ unde } t_i < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_{i+1}$$

Pe de altă parte avem egalitatea

$$l_d = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(t_i) + g'^2(t_i) + h'^2(t_i)} (t_{i+1} - t_i) + \\ + \sum_{i=0}^{n-1} (\sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\tau_i) + h'^2(\zeta_i)} - \sqrt{f'^2(t_i) + g'^2(t_i) + h'^2(t_i)}) (t_{i+1} - t_i) \quad (3)$$

Considerăm funcția reală α de trei variabile reale definite de $\alpha(u, v, w) = \sqrt{f'^2(u) + g'^2(v) + h'^2(w)}: \Delta \rightarrow \mathbf{R}$ unde $\Delta = [a, b] \times [a, b] \times [a, b]$ care este evident continuă pe compactul Δ . Funcția α va fi și uniform continuă pe Δ și deci $(\forall) \varepsilon > 0: (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$ așa fel încît oricare ar fi punctele (u', v', w') și (u'', v'', w'') din Δ cu $|u' - u''| < \delta(\varepsilon); |v' - v''| < \delta(\varepsilon); |w' - w''| < \delta(\varepsilon)$ să avem $|\alpha(u', v', w') - \alpha(u'', v'', w'')| < \varepsilon$

Dacă considerăm diviziunea d a intervalului $[a, b]$ astfel încît $v(d) < \delta(\varepsilon)$ și alegem

$$(u', v', w') = (\xi_i, \tau_i, \zeta_i); (u'', v'', w'') = (t_i, t_i, t_i)$$

atunci pentru termenul al doilea din membrul drept al egalității (3) obținem

$$\left| \sum_{i=0}^{n-1} [\alpha(\xi_i, \tau_i, \zeta_i) - \alpha(t_i, t_i, t_i)] (t_{i+1} - t_i) \right| \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(\xi_i, \tau_i, \zeta_i) - \alpha(t_i, t_i, t_i)| (t_{i+1} - t_i) \leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = \varepsilon(b-a)$$

Prin urmare termenul considerat este majorat de $\varepsilon(b-a)$.

Primul termen din membrul drept al egalității (3) este o sumă Riemann corespunzătoare funcției $\sqrt{f'^2 + g'^2 + h'^2}$, diviziunii d și alegerii punctelor intermediare t_i . Dar această funcție fiind continuă pe intervalul compact $[a, b]$ este integrabilă pe acest interval.

Să considerăm un șir de diviziune (d_n) ale lui $[a, b]$ cu $v(d_n) \rightarrow 0$. Pentru fiecare diviziune d_n putem scrie o egalitate de tipul (3) și prin trecere la limite avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_{d_n} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt$$

§ 3. DRUMURI ECHIVALENTE, CURBĂ:

Definiția 1.3. Două drumuri $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^3$ și $\gamma_2: [a_2, b_2] \rightarrow \mathbf{R}^3$ se numesc echivalente și se scrie $\gamma_1 \sim \gamma_2$ dacă există o funcție

$\varphi: [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$, continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a_1) = a_2; \varphi(b_1) = b_2$ și astfel încît

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)); (\forall) t \in [a_1, b_1]$$

Se vede imediat că două drumuri echivalente au aceeași imagine deoarece $\varphi([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$ și acest fapt este ilustrat în fig. 29.

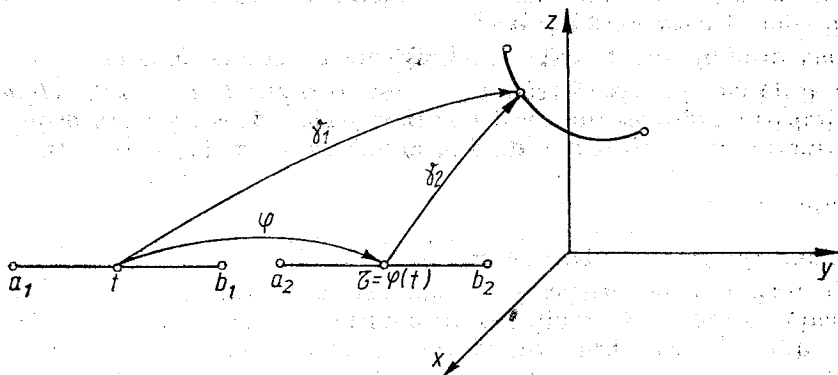


Fig. 29.

În legătură cu drumurile echivalente are loc

Teorema 1.3.

Un drum echivalent cu un drum rectificabil este rectificabil.

Demonstrație: Fie γ_1 și γ_2 două drumuri echivalente și

$$x = f_1(t); y = g_1(t); z = h_1(t); t \in [a_1, b_1]$$

o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma_1)$ iar

$$x = f_2(\tau); y = g_2(\tau); z = h_2(\tau); \tau \in [a_2, b_2]$$

o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma_2)$.

Fie φ funcția care apare în condiția de echivalență a lui γ_1 cu γ_2 . Orice diviziune

$$d_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_n = b_2)$$

a intervalului $[a_2, b_2]$ este imaginea prin φ a unei diviziuni

$$d_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b_1)$$

a intervalului $[a_1, b_1]$, adică $\tau_i = \varphi(t_i)$; $i = 0, 1, \dots, n$.

Reciproc, oricărei diviziuni d_1 a lui $[a_1, b_1]$ îi corespunde o diviziune d_2 a lui $[a_2, b_2]$. Deci funcția φ stabilește o corespondență biunivocă între diviziunile lui $[a_1, b_1]$ și cele ale lui $[a_2, b_2]$. Din definiția echivalenței drumurilor γ_1 și γ_2 avem:

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t)); g_1(t) = g_2(\varphi(t)); h_1(t) = h_2(\varphi(t)),$$

și deci

$$\begin{aligned} l_{d_1} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i))^2 + (g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i))^2 + (h_1(t_{i+1}) - h_1(t_i))^2} = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f_2(\tau_{i+1}) - f_2(\tau_i))^2 + (g_2(\tau_{i+1}) - g_2(\tau_i))^2 + (h_2(\tau_{i+1}) - h_2(\tau_i))^2} = l_{d_2} \end{aligned}$$

prin urmare mulțimile de numere pozitive $\{l_a\}$ și $\{l_{a'}\}$ coincid. Rezultă că aceste două mulțimi sînt în același timp majorate sau nemajorate și teorema este demonstrată. Mai mult decît atît, marginile superioare a celor două mulțimi coincid dacă există și deci:

Două drumuri rectificabile și echivalente au aceeași lungime.

Se arată cu ușurință că relația „ $\sim$ ” este o *relație de echivalență algebrică* și deci împarte mulțimea tuturor drumurilor în clase de echivalență disjuncte; două drumuri sînt echivalente, dacă și numai dacă sînt în aceeași clasă.

Definiția 2.3.

Se numește curbă o clasă de drumuri echivalente.

Următoarele caracteristici și noțiuni sînt invariante față de relația de echivalență introdusă în mulțimea drumurilor: imaginea drumului; drum simplu; drum închis; drum rectificabil; lungimea unui drum rectificabil.

Relativ la curbe se introduc următoarele noțiuni: *imaginea curbei*, ca fiind imaginea unui drum conținut de curbă; *curbă simplă*, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum simplu; *curbă închisă*, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum închis; *curbă rectificabilă* ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum rectificabil; *lungimea unei curbe rectificabile*, ca fiind lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc această curbă; *curbă netedă* ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum neted; *curbe juxtapozabile* ca fiind două curbe Γ_1 și Γ_2 pentru care există un drum γ_1 aparținînd lui Γ_1 și un drum γ_2 aparținînd lui Γ_2 , astfel încît γ_1 și γ_2 să fie juxtapozabile. În acest caz curba definită de clasa de echivalență a drumului $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ se numește juxtapunerea curbelor Γ_1 și Γ_2 și se notează

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

O curbă Γ se numește netedă pe porțiuni dacă ea este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede Γ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) și se notează

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$$

Este evident faptul că o curbă netedă pe porțiuni este rectificabilă.

Dacă notăm cu $l(\Gamma)$ lungimea unei curbe rectificabile se arată cu ușurință că pentru o curbă netedă pe porțiuni are loc egalitatea

$$l(\Gamma) = \sum_{i=1}^n l(\Gamma_i)$$

În tot ce urmează mai departe, vom desemna prin reprezentări parametrice atît drumurile cît și curbele.

Expresii ca „imaginea curbei”, „imaginea drumului”, „imaginea reprezentării” vor fi folosite în aceeași accepțiune. Noțiuni ca acelea de „drum” și „curbă” vor fi desemnate printr-o reprezentare parametrică.

Observație. Deși toate considerațiile făcute pînă acum s-au referit la drumuri și curbe din spațiu ele se transpun fără dificultate la drumuri și curbe din plan. De exemplu, lungimea $l(\gamma)$ a unui drum neted din plan este dată de formula

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt \quad (3)$$

Dacă γ este un drum din plan definit de reprezentarea parametrică în coordonate polare

$$x = \varphi(\theta) \cos \theta; y = \varphi(\theta) \sin \theta; \theta \in [a, b]$$

unde θ este unghiul polar iar funcția $\varphi \geq 0$ pe $[a, b]$ și dacă φ admite derivata continuă pe $[a, b]$ atunci drumul γ este rectificabil și lungimea sa este dată de formula

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)} d\theta \quad (4)$$

În adevăr; să punem $f(\theta) = \varphi(\theta) \cdot \cos \theta$; $g(\theta) = \varphi(\theta) \sin \theta$

Funcțiile f și g sînt derivabile, cu derivata continuă pe $[a, b]$, deci drumul considerat este rectificabil.

Avem $f'(\theta) = \varphi'(\theta) \cos \theta - \varphi(\theta) \sin \theta$; $g'(\theta) = \varphi'(\theta) \sin \theta + \varphi(\theta) \cos \theta$ și deci $f'^2(\theta) + g'^2(\theta) = \varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)$. Prin simpla aplicare a formulei (3) obținem formula (4).

Exemplu 1. Să se calculeze lungimea curbei Γ definită de reprezentarea parametrică:

$$x = a \cos t; y = a \sin t; z = bt; t \in [0, 2\pi]; a > 0; b > 0$$

(elicea circulară a cărei imagine este ilustrată în fig. 30).

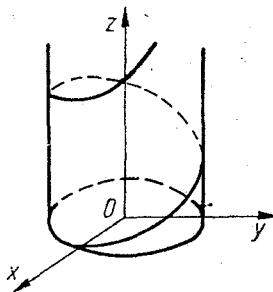


Fig. 30.

Cu ajutorul formulei (2) obținem

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplu 2.

Să se calculeze lungimea curbei plane Γ definită de reprezentarea parametrică

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \quad t \in [0, 2\pi]; \quad a > 0$$

(o buclă a cicloidei și imaginea sa este ilustrată în fig. 31).

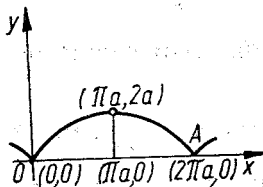


Fig. 31.

Cu ajutorul formulei (3) obținem

$$l(\Gamma) = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \, dt = 8a$$

Exemplu 3. Să se calculeze lungimea curbei plane definită de reprezentarea parametrică:

$$x = a \cos t; \quad y = b \sin t; \quad t \in [0, 2\pi]; \quad a > b > 0 \quad (\text{elipsa})$$

Tot cu ajutorul formulei (3) obținem

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt = \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 t} \, dt = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \, dt \end{aligned}$$

unde am notat $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Dacă în ultima integrală facem schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$ obținem

$$l(\Gamma) = 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi} \, d\varphi \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

Deci lungimea elipsei se exprimă cu ajutorul unei integrale eliptice de speța a doua. Deoarece $0 < \varepsilon < 1$ putem folosi seria binomială și obținem:

$$(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2!} \varepsilon^4 \sin^4 \varphi - \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1 \cdot 3}{3!} \varepsilon^6 \sin^6 \varphi \dots$$

Dacă utilizăm teorema de integrare a seriilor de funcții rezultă:

$$l(\Gamma) = 2\pi a \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \epsilon^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2} \epsilon^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \epsilon^6 \dots$$

Probleme: Să se calculeze lungimea curbelor definite de următoarele reprezentări parametrice.

$$1) \ x = a e^{kt} \cos t; \ y = a e^{kt} \sin t; \ z = a e^{kt}; \ t \in [0, 1]; \ a > 0; \ k > 0$$

$$R: \frac{a}{k} \sqrt{1 + 2k^2} (e^k - 1)$$

$$2) \ x = \operatorname{tg} t; \ y = \operatorname{cotg} t; \ z = \sqrt{2} \ln \operatorname{tg} t; \ t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right] \quad R: \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$3) \ x = \frac{\cos^3 t}{3}; \ y = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}; \ t \in [0, 2\pi] \quad R: \pi$$

$$4) \ x = t; \ y = \ln \sin t; \ t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right]; \quad R: 2 \ln (1 + \sqrt{2})$$

$$5) \ \rho = a e^{b\theta}; \ \theta \in [0, \theta_0] \text{ unde } a > 0; \ \theta_0 > 0; \ b > 0;$$

$$R: \frac{a}{b} \sqrt{1 + b^2} (e^{b\theta_0} - 1)$$

$$6) \ \rho = |\sin \theta|; \ \theta \in [0, 2\pi] \quad R: 2\pi$$

§ 4. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

Să considerăm un fir material de grosime neglijabilă, deoarece firul este prevăzut cu o lungime, vom admite că el este imaginea unei curbe rectificabile Γ , definită de reprezentarea parametrică.

$$x = f(t); \ y = g(t); \ z = h(t); \ t \in [a, b] \quad (1)$$

Pe imaginea curbei Γ presupunem distribuită o masă de densitate $\rho(x, y, z)$, cunoscută în fiecare punct $(x, y, z) \in I(\Gamma)$.

Problema determinării masei unui fir material conduce la noțiunea de integrală curbilinie de primul tip. Pentru fiecare $t \in [a, b]$ să notăm cu $\Gamma(t)$ curba (rectificabilă) definită de reprezentarea parametrică.

$$x = f(\tau); \ y = g(\tau); \ z = h(\tau); \ \tau \in [a, t] \quad (5)$$

iar cu $l(t)$ lungimea ei. Din însăși definiția lungimii rezultă că $l(t)$ este strict crescătoare pe $[a, b]$.

Fie

$$d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b)$$

o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$.

Masa firului material poate fi aproximată cu suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) [l(t_{i+1}) - l(t_i)] \quad (6)$$

unde ξ_i este un punct oarecare din intervalul $[t_i, t_{i+1}]$.

Există și alte probleme care conduc la considerarea unor sume de forma celor de mai sus, sume cu ajutorul cărora se definește integrala Stieltjes.

Astfel este problema determinării sarcinii electrice totale a unui fir material atunci cînd se cunoaște densitatea de repartiție în fiecare punct al firului. Pentru a introduce noțiunea de integrală curbilinie de primul tip reamintim definiția noțiunii de domeniu.

Definiția 1.4.

O mulțime $D \subset \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^2$) se numește mulțime conexă dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise G_1 și G_2 astfel ca:

$$D \subset G_1 \cup G_2; D \cap G_1 \neq \emptyset; D \cap G_2 \neq \emptyset \text{ și } D \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

În limbajul obișnuit, a spune că mulțimea D este conexă revine la faptul că „este formată dintr-o singură bucată”.

Exemple. Sferele și intervalele tridimensionale sînt mulțimi conexe din $\mathbf{R}^3$. În $\mathbf{R}^2$, coroanele circulare sînt mulțimi conexe. Tot în $\mathbf{R}^2$ reuniunea a două cercuri închise și disjuncte nu este o mulțime conexă.

Definiția 2.4.

O mulțime $D \subset \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^2$) deschisă și conexă se numește *domeniu*.

Tot în limbajul obișnuit, a spune că o mulțime D este domeniu revine la faptul că D este o mulțime deschisă formată dintr-o singură bucată.

Definiția 3.4.

Fie F o funcție reală definită pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^3$ care conține imaginea curbei rectificabile Γ definită de reprezentarea parametrică (1). Dacă integrala Stieltjes

$$\int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) dl(t) \quad (7)$$

există, atunci ea se notează astfel

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dl$$

și se numește integrala curbilinie de primul tip a funcției F de-a lungul curbei Γ .

Dacă integrala (7) există, atunci spunem că F este integrabilă în raport cu l de-a lungul curbei Γ .

Pentru ca noțiunea de integrala curbilinie de primul tip să nu fie contradictorie, trebuie să arătăm că nici existența și nici valoarea sa nu depind de alegerea drumului ci numai de curba Γ .

În acest sens are loc

Teorema 1.4. Fie γ_1 și γ_2 două drumuri din spațiu, rectificabile și echivalente, definite de următoarele reprezentări parametrice

$$x = f_1(t); y = g_1(t); z = h_1(t); t \in [a_1, b_1]$$

respectiv

$$x = f_2(\tau); y = g_2(\tau); z = h_2(\tau); \tau \in [a_2, b_2]$$

atunci existența fiecăreia dintre următoarele două integrale Stieltjes implică existența celeilalte și egalitatea lor:

$$\int_{a_1}^{b_1} F(f_1(t), g_1(t), h_1(t)) dL_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} F(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)) dL_2(\tau) \quad (8)$$

Demonstrație. Să presupunem că prima integrală există. Fie

$$d_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n = b_1)$$

o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$. Funcția φ care apare în condiția de echivalență a lui γ_1 cu γ_2 , asociază lui d_1 o diviziune

$$d_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_n = b_2)$$

a intervalului $[a_2, b_2]$ unde $\tau_i = \varphi(t_i)$. Fie $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Prin funcția φ , lui ξ_i îi corespunde o valoare $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ cu proprietatea că $\eta_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Dacă ținem seama că drumurile γ_1 și γ_2 sînt echivalente avem $l_1(t) = l_2(\tau)$ și

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t)); g_1(t) = g_2(\varphi(t)); h_1(t) = h_2(\varphi(t));$$

$$(\forall) t \in [a_1, b_1],$$

deci

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} F(f_1(\xi_i), g_1(\xi_i), h_1(\xi_i)) [l_1(t_{i+1}) - l_1(t_i)] = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} F(f_2(\eta_i), g_2(\eta_i), h_2(\eta_i)) [l_2(\tau_{i+1}) - l_2(\tau_i)]. \end{aligned}$$

Dacă observăm că φ este uniform continuă pe $[a_1, b_1]$, rezultă că norma uneia dintre diviziunile d_1 și d_2 devine oricît de mică de îndată ce norma celeilalte este suficient de mică și prin urmare există a doua integrală din (8) și are loc egalitatea (8).

§ 5. CALCULUL INTEGRALEI CURBILINII DE PRIMUL TIP

Vom arăta, în anumite ipoteze, că o integrală curbilinie de primul tip se calculează cu ajutorul unei integrale Riemann.

În acest sens are loc

Teorema 1.5.

Dacă curba Γ definită de reprezentarea parametrică (1) este netedă iar funcția F este continuă pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^3$ care conține imaginea lui Γ , atunci

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt \quad (9)$$

Demonstrație. Arătăm mai întâi că $l(t)$ lungimea curbei $\Gamma(t)$, admite derivată continuă pe $[a, b]$.

În condițiile teoremei avem.

$$l(t) = \int_a^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)} du$$

Însă funcția de sub semnul integrală este continuă pe $[a, b]$ și deci $l(t)$ este derivabilă și are loc relația

$$l'(t) = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}$$

Dacă ținem seama de teorema de reducere a integralei Stieltjes la o integrală Riemann, avem

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)} dt$$

și teorema este demonstrată.

Exemplu Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} x y z dl$ unde Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = a \cos t; y = a \sin t; z = bt; t \in [0, 2\pi]. \text{ Avem}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} a^2 (\cos t \sin t) bt \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} t \sin 2t dt = \\ &= \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{-t \cos 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t dt \right) = -\frac{1}{2} \pi a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Observația 1.

Dacă curba Γ din spațiu este netedă pe porțiuni $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \Gamma_i$ și funcția F este integrabilă pe fiecare curbă $\Gamma_i (i = 1, 2, \dots, n)$ atunci funcția F este integrabilă pe Γ și are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma} F(x, y, z) dl = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} F(x, y, z) dl$$

Exemplu:

Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} (x + y + z) dl$ unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ iar curbele

Γ_1 și Γ_2 sînt definite de următoarele reprezentări parametrice

$$x = R \cos t; y = R \sin t; z = 0; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

respectiv

$$x = 0; y = R - t; z = t; t \in [0, R]$$

Imaginea curbei Γ este ilustrată în fig. 32.

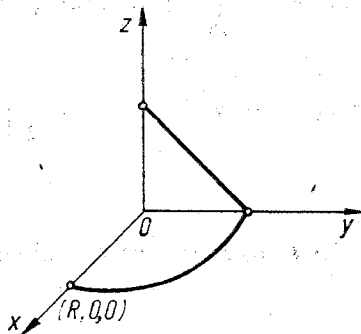


Fig. 32.

Avem

$$I = \int_{\Gamma_1} (x + y + z) dl + \int_{\Gamma_2} (x + y + z) dl$$

Dar

$$\int_{\Gamma_1} (x + y + z) dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \cos t + R \sin t) \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2R^2$$

și

$$\int_{\Gamma_2} (x + y + z) dl = \int_0^R (t + R - t) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} R^2$$

și deci

$$I = (2 + \sqrt{2}) R^2$$

Observația 2. Fie Γ o curbă rectificabilă din plan definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t); y = g(t); t \in [a, b]$$

și F o funcție reală definită pe un domeniu plan D care conține imaginea curbei Γ . Integrala curbilinie de primul tip a funcției F de-a lungul curbei Γ se definește la fel ca și integrala curbilinie de primul tip de-a lungul unei curbe rectificabile din spațiu și se notează astfel:

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dl$$

În condiții asemănătoare celor din teorema 1.5 avem:

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dl = \int_a^b F(f(t), g(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt$$

În particular, dacă curba Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = t; y = f(t); t \in [a, b] \text{ adică } y = f(x); x \in [a, b]$$

avem

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dl = \int_a^b F(t, f(t)) \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$$

Exemplu: Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} xy dl$ unde Γ este definită de reprezentarea parametrică,

$$x = a \cos t; y = a \sin t; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]; a > 0$$

avem

$$\begin{aligned} I &= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t} dt = \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt = \frac{a^3}{2} \end{aligned}$$

Observația 2

Integrala definită $\int_a^b f(x) dx$ a unei funcții reale și pozitive poate fi interpretată ca fiind egală cu aria unui trapez curbiliniu, hașurat în fig. 33.

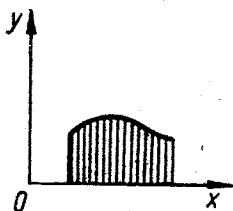


Fig. 33.

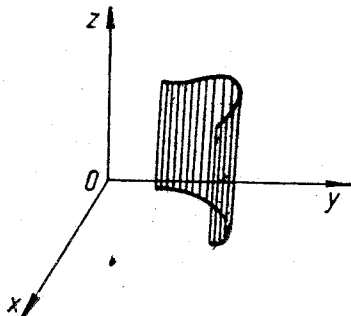


Fig. 34.

Similar, integrala curbilinie de primul tip din plan

$$\int_{\Gamma} F(x, y) dl$$

a unei funcții reale F cu $F(x, y) \geq 0$; $(\forall) (x, y) \in I(\Gamma)$, poate fi interpretată ca fiind egală cu aria unei porțiuni dintr-o suprafață cilindrică, hașurată în fig. 34.

§ 6. MASA ȘI CENTRUL DE GREUTATE ALE UNUI FIR MATERIAL

Să considerăm un fir material de grosime neglijabilă, care este imaginea unei curbe simple rectificabile Γ din spațiu.

Dacă $\rho(x, y, z)$ este densitatea, cunoscută în fiecare punct $(x, y, z) \in I(\Gamma)$, atunci din considerații de mecanică se poate arăta că masa M și coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) ale firului sînt date în formulele:

$$M = \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) \, dl; \quad x_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \rho(x, y, z) \, dl$$

$$y_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \rho(x, y, z) \, dl; \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} z \rho(x, y, z) \, dl$$

în ipoteza că integralele scrise există.

Dacă densitatea este constantă (fir material omogen) atunci coordonatele centrului de greutate sînt date de formulele:

$$x_G = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} x \, dl; \quad y_G = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} y \, dl; \quad z_G = \frac{1}{l(\Gamma)} \int_{\Gamma} z \, dl$$

Dacă firul material este imaginea unei curbe simple rectificabile Γ din plan, atunci masa M și coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) sînt date de formulele:

$$M = \int_{\Gamma} \rho(x, y) \, dl; \quad x_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} x \rho(x, y) \, dl; \quad z_G = \frac{1}{M} \int_{\Gamma} y \rho(x, y) \, dl.$$

Exemplu:

Să se afle coordonatele centrului de greutate al unui fir material omogen dacă el este imaginea curbei Γ definită de reprezentarea parametrică

$$x = a \cos t; \quad y = a \sin t; \quad z = bt; \quad t \in [0, 2\pi]; \quad a > 0; \quad b > 0$$

Avem:

$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi} a(\cos t) \sqrt{a^2 + b^2} \, dt}{\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} \, dt} = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos t \, dt = 0;$$

analog $y_G = 0$

$$z_G = \frac{\int_0^{2\pi} bt \sqrt{a^2 + b^2} \, dt}{2\pi \sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\int_0^{2\pi} bt \, dt}{2\pi} = b\pi$$

și deci $(x_G, y_G, z_G) = (0, 0, b\pi)$

Probleme

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip:

$$1) \int_{\Gamma} x^2 y^2 \, dl, \text{ unde } \Gamma: x = a \cos^3 t; y = a \sin^3 t; t \in [0, 2\pi] \quad R: \frac{3a^5}{70}$$

$$2) \int_{\Gamma} z(x^2 + y^2) \, dl \text{ unde } \Gamma: x = t \cos t; y = t \sin t; z = t; t \in [0, 1] \\ R: \frac{4\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

$$3) \int_{\Gamma} |xy| \, dl \text{ unde: } x = a \cos t; y = b \sin t; t \in [0, 4\pi] \text{ cu } a > 0 \text{ și } b > 0 \\ R: \frac{8ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$$

$$4) \int (x^2 + y^2) \ln z \, dl \text{ unde } x = e^t \cos t; y = e^t \sin t; z = e^t; t \in [0, 1] \\ R: \frac{1 + 2e^3}{3\sqrt{3}}$$

Să se calculeze masa M și coordonatele centrului de greutate ale firelor materiale care sînt imagini ale curbelor definite de următoarele reprezentări parametrice și au densitățile specificate.

$$5) x = a(t - \sin t); y = a(1 - \cos t); t \in [0, 2\pi]; a > 0 \text{ și } \rho = \sqrt{y} \\ R: M = 2a\sqrt{2a\pi}; x_G = a\pi; y_G = \frac{3}{2}a$$

$$6) x = a \cos^3 t; y = a \sin^3 t; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \text{ unde } a > 0 \text{ și } \rho = 1 \\ R: M = \frac{3a}{2}; x_G = y_G = \frac{2}{5}a$$

$$7) x = 4t^5; y = \sqrt{15} t^4; z = 2t^3; t \in [-1, 1]; \rho = \frac{1}{2}|z| \\ R: M = 7; x_G = z_G = 0; y_G = \frac{68\sqrt{15}}{105}$$

§ 7. INTEGRALA CURBILINIE DE AL DOILEA TIP

Pentru funcțiile reale definite și mărginite pe un interval compact $[a, b]$ s-a introdus integrala Riemann $\int_a^b f(x) \, dx$.

Acest concept poate fi extins la funcțiile vectoriale definite pe imaginea unei curbe, conducând la noțiunea de integrală curbilinie de al doilea tip. În matematica aplicată, integrala curbilinie apare în probleme diferite cum ar fi determinarea lucrului mecanic, calculul circulației fluidelor etc.

Pentru o forță constantă $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ care acționează asupra unui punct material ce se deplasează de la punctul $A(x_1, y_1, z_1)$ la punctul $B(x_2, y_2, z_2)$ pe segmentul AB , lucrul mecanic al lui $\vec{V}$ este egal cu produsul scalar

$$L = \vec{V} \cdot \overline{AB} = V \cdot AB \cdot \cos \alpha = (x_2 - x_1)P + (y_2 - y_1)Q + (z_2 - z_1)R \quad (1)$$

unde α este unghiul făcut de $\vec{V}$ cu $\overline{AB}$.

Dacă $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ și $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ sînt vectorii de poziție ai lui A respectiv B atunci

$$L = \vec{V} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

În cazul general, considerăm o curbă Γ rectificabilă din spațiu, definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t), y = g(t); z = h(t); t \in [a, b] \quad (2)$$

și o forță $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ale cărei componente P, Q și R sînt funcții reale de trei variabile reale x, y, z definite pe un domeniu D care conține imaginea lui Γ .

Pentru a defini integrala curbilinie de al doilea tip introducem noțiunea de curbă orientată.

Fie $M(f(t), g(t), h(t))$ punctul de pe $I(\Gamma)$ corespunzător lui $t \in [a, b]$ prin (2). Cînd t parcurge continuu intervalul $[a, b]$ de la a la b , punctul corespunzător M parcurge $I(\Gamma)$ într-un sens pe care-l numim direct.

Cînd t parcurge continuu intervalul $[a, b]$ de la b la a , punctul corespunzător M parcurge $I(\Gamma)$ în sens invers.

Definiție 1.7

O curbă Γ împreună cu unul din sensurile de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ se numește curbă orientată.

Curba Γ împreună cu sensul direct de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ se notează cu Γ_+ . În mod asemănător se definește Γ_- .

În fig. 36 sînt ilustrate cele două sensuri de parcurgere a lui $I(\Gamma)$.

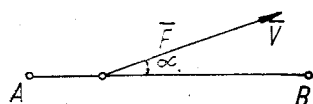


Fig. 35.

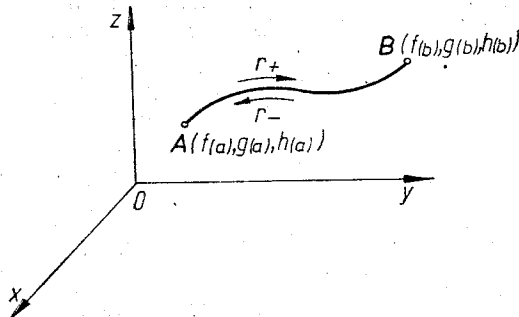


Fig. 36.

Observație

¹ Dacă ținem seama de faptul că funcția φ care apare în definiția echivalenței a două drumuri este continuă și strict crescătoare, rezultă că sensul de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ nu depinde de alegerea drumului ci numai de curba Γ . Fie d o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$

$$d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b)$$

și $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Lucrul mecanic al unei forțe variabile $\vec{V}$ care acționează asupra unui punct material ce se deplasează pe $I(\Gamma)$ în sens direct îl aproximăm cu suma

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) [f(t_{i+1}) - f(t_i)] + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} Q(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) [g(t_{i+1}) - g(t_i)] + \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} R(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) [h(t_{i+1}) - h(t_i)] \end{aligned} \quad (3)$$

Este deci natural ca în cazul în care forța $\vec{V}$ este variabilă și acționează asupra unui punct material care se deplasează pe $I(\Gamma)$ în sens direct să definim lucrul mecanic a lui $\vec{V}$ printr-o sumă de integrale Stieltjes (în cazul în care există)

$$\begin{aligned} & \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) df(t) + \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t)) dg(t) + \\ & + \int_a^b R(f(t), g(t), h(t)) dh(t) \end{aligned}$$

În cazul general al unei funcții vectoriale

$$\vec{V}: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ (cîmp vectorial)}$$

independent de semnificația sa fizică, sîntem conduși la următoarea

Definiție 2.7

Fie Γ o curbă rectificabilă din spațiu definită de reprezentarea parametrică (2). Dacă P, Q și R sînt trei funcții reale definite pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ care conține imaginea lui Γ și dacă următoarele integrale Stieltjes există

$$\begin{aligned} & \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) df(t), \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t)) dg(t) \\ & \int_a^b R(f(t), g(t), h(t)) dh(t) \end{aligned}$$

atunci suma lor se notează astfel:

$$\int_{\Gamma+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (4)$$

și se numește integrală curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale

$$\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \text{ (cîmp vectorial)}$$

de-a lungul curbei Γ_+ .

Pentru ca noțiunea de integrală curbilinie de al doilea tip să nu fie contradictorie, trebuie să arătăm că nici existența și nici valoarea sa nu depind de alegerea drumului ci numai de curbă.

În acest sens are loc

Teorema 1.7.

Fie γ_1 și γ_2 două drumuri din spațiu, rectificabile și echivalente, definite de următoarele reprezentări parametrice

$$x = f_1(t); y = g_1(t); z = h_1(t); t \in [a_1, b_1]$$

respectiv

$$x = f_2(\tau); y = g_2(\tau); z = h_2(\tau); \tau \in [a_2, b_2]$$

atunci există și sînt egale următoarele integrale Stieltjes

$$\int_{a_1}^{b_1} P(f_1(t), g_1(t), h_1(t)) df_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} P(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)) df_2(\tau) \quad (5)$$

Demonstrație:

Să presupunem că prima integrală există.

Fie

$$d_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b_1)$$

o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$ și $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Funcția φ care apare în condiția de echivalență a lui γ_1 cu γ_2 asociază lui d_1 o diviziune

$$d_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots < \tau_n = b_2)$$

a intervalului $[a_2, b_2]$; unde $\tau_i = \varphi(t_i)$.

Prin funcția φ lui ξ_i îi corespunde o valoare $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ cu proprietatea că $\eta_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Dacă ținem seama că drumurile sînt echivalente avem

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t)); g_1(t) = g_2(\varphi(t)); h_1(t) = h_2(\varphi(t)); (\forall) t \in [a_1, b_1]$$

și deci

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} P(f_1(\xi_i), g_1(\xi_i), h_1(\xi_i)) [f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i)] = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} P(f_2(\eta_i), g_2(\eta_i), h_2(\eta_i)) [f_2(\tau_{i+1}) - f_2(\tau_i)] \end{aligned}$$

Dacă observăm că φ este uniform continuă pe $[a_1, b_1]$ rezultă că norma uneia dintre diviziunile d_1 și d_2 devine oricât de mică de îndată ce norma celeilalte este suficient de mică și prin urmare există a doua integrală din (5) și are loc egalitatea (5). În mod asemănător se arată că au loc egalitățile

$$\int_{a_1}^{b_1} Q(f_1(t), g_1(t), h_1(t)) \, dg_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} Q(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)) \, dg_2(\tau)$$

$$\int_{a_1}^{b_1} R(f_1(t), g_1(t), h_1(t)) \, dh_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} R(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau)) \, dh_2(\tau)$$

și deci existența și valoarea integralei curbilinii de al doilea tip nu depinde de alegerea drumului ci numai de curba Γ .

Observația 1

Fie Γ o curbă rectificabilă din plan, definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t); \quad y = g(t); \quad t \in [a, b]$$

și P și Q două funcții reale definite pe un domeniu din plan care conține imaginea lui Γ .

Integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale

$$\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j}$$

de-a lungul curbei Γ_+ se definește la fel ca și integrala curbilinie de al doilea tip de-a lungul unei curbe din spațiu și se notează

$$\int_{\Gamma_+} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy$$

Observația 2

Dacă $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ este vectorul de poziție al unui punct de pe $I(\Gamma)$ și $d\bar{r}$ este vectorul simbolic

$$\bar{i} \, dx + \bar{j} \, dy + \bar{k} \, dz \text{ atunci expresia}$$

$$P(x, y, z) \, dx + Q(x, y, z) \, dy + R(x, y, z) \, dz$$

este egală cu produsul scalar simbolic $\bar{V} \cdot d\bar{r}$ și integrala curbilinie de al doilea tip se scrie sub forma condensată, vectorială

$$\int_{\Gamma_+} \bar{V} \cdot d\bar{r}$$

Observația 3. Integrala curbilinie de al doilea tip în lungul curbei Γ_- se definește prin egalitatea

$$\int_{\Gamma_-} \bar{V} \cdot d\bar{r} = - \int_{\Gamma_+} \bar{V} \cdot d\bar{r}$$

Observația 4.

Dacă curba Γ din definiția 2.7 este închisă atunci integrala curbilinie de al doilea tip se notează astfel

$$\oint_{\Gamma_+} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

Dacă ținem seama de proprietățile integralei Stieltjes rezultă imediat următoarele proprietăți ale integralei curbilinie de al doilea tip.

1) Dacă funcțiile vectoriale $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ sînt integrabile de-a lungul curbei Γ_+ atunci și funcția vectorială $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ_+ și are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_+} (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_+} \vec{V}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_+} \vec{V}_2 \cdot d\vec{r}$$

2) Dacă funcția vectorială $\vec{V}$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ_+ atunci $\lambda \vec{V}$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ_+ oricare ar fi λ real și

$$\int_{\Gamma_+} \lambda \vec{V} \cdot d\vec{r} = \lambda \int_{\Gamma_+} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

3) Dacă curba Γ este juxtapunerea curbelor Γ_1 și Γ_2 ($\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$) și dacă funcția vectorială $\vec{V}$ este integrabilă de-a lungul curbelor Γ_{1+} și Γ_{2+} atunci $\vec{V}$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ_+ și are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_+} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_{1+}} \vec{V} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_{2+}} \vec{V} \cdot d\vec{r}$$

§ 8. CALCULUL INTEGRALEI CURBILINII DE AL DOILEA TIP

În anumite condiții calculul integralei curbilinie de al doilea tip revine la calculul unei integrale Riemann, așa cum rețese din următoarea

Teorema 1.8.

Fie Γ o curbă netedă din spațiu definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t); y = g(t); z = h(t); t \in [a, b]$$

Dacă P, Q și R sînt trei funcții reale definite și continue pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$, care conține imaginea lui Γ , atunci există integrala curbilinie (4) și are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ = \int_a^b [P(f(t), g(t), h(t)) f'(t) + Q(f(t), g(t), h(t)) g'(t) + \\ + R(f(t), g(t), h(t)) h'(t)] dt \end{aligned} \quad (6)$$

Demonstrație:

Funcțiile f, g și h au derivatele continue (curba Γ a fost presupusă netedă) și prin simpla aplicare a teoremei de reducere a unei integrale Stieltjes la o integrală Riemann avem

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_+} P(x, y, z) dx &= \int_a^b P(f(t), g(t), h(t)) f'(t) dt \\ \int_{\Gamma_+} Q(x, y, z) dy &= \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t)) g'(t) dt \\ \int_{\Gamma_+} R(x, y, z) dz &= \int_a^b R(f(t), g(t), h(t)) h'(t) dt\end{aligned}$$

Dacă ținem seama de definiția integralei curbilinii de al doilea tip (definiția 2.7) rezultă imediat egalitatea (6)

Exemplu:

Să se calculeze $I = \int_{\Gamma_+} y dx - x dy + (x^2 + y^2 + z^2) dz$ unde curba Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = -t \cos t + \sin t; y = t \sin t + \cos t; z = t + 1; t \in [0, \pi]$$

În acest caz avem $f'(t) = t \sin t$; $g'(t) = t \cos t$; $h'(t) = 1$

Dacă ținem seama de formula (6) avem

$$\begin{aligned}I &= \int_0^\pi [(t \sin t + \cos t) t \sin t - (-t \cos t + \sin t) t \cos t + \\ &\quad + (-t \cos t + \sin t)^2 + (t \sin t + \cos t)^2 + (t + 1)^2] dt = \\ &= \int_0^\pi (3t^2 + 2t + 2) dt = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi\end{aligned}$$

Observație:

În cazul integralei curbilinii de al doilea tip de-a lungul unei curbe din plan se arată, în condiții asemănătoare celor din teorema 1.8, că are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b [P(f(t), g(t)) f'(t) + Q(f(t), g(t)) g'(t)] dt \quad (7)$$

Exemplu:

Să se calculeze $I = \int_{\Gamma_+} x dx + e^x dy$, unde Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = \ln(1 + t); y = \sqrt{1 + t}; t \in [0, 1]$$

În acest caz $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ și $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$; deci

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{(1+t)}{2\sqrt{1+t}} \right) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t} dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1+t} dt = \\ = \frac{1}{2} (\ln 2)^2 + \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1)$$

§ 9. INDEPENDENȚA DE DRUM A INTEGRALEI CURBILINII

După cum am văzut, integrala curbilinie de al doilea tip are o semnificație fizică deosebită și anume ea exprimă lucrul mecanic al unei forțe care acționează asupra unui punct material ce se deplasează de-a lungul lui $I(\Gamma)$. În legătură cu lucrul mecanic se pune problema independenței sale de drum, adică valoarea lucrului mecanic să nu depindă de curba Γ (netedă pe porțiuni) pe a cărei imagine se află punctele A și B ci numai de aceste puncte.

În acest sens un exemplu nu este oferit de forța gravitațională, pentru care se știe că lucrul mecanic nu depinde de drum. Independența de drum a integralei curbilinii de al doilea tip, prezintă interes și din punct de vedere matematic. Pentru a da condiții necesare și suficiente ca integrala curbilinie de al doilea tip să nu depindă de drum sînt necesare cîteva noțiuni.

Definiția 1.9.

Spunem că domeniul $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu simplu conex dacă odată cu orice curbă Γ simplă și închisă cu imaginea $I(\Gamma) \subset D$, aparține lui D și porțiunea plană mărginită de $I(\Gamma)$.

Exemple:

Interiorul unui cerc este un domeniu simplu conex din plan.

Partea plană mărginită de două cercuri unul interior celuilalt (coroană circulară) nu este un domeniu simplu conex.

Definiție 2.9.

Spunem că domeniul $D \subset \mathbf{R}^3$ este un domeniu simplu conex dacă pentru orice curbă Γ simplă și închisă cu $I(\Gamma) \subset D$, există o suprafață deschisă cu bordura $I(\Gamma)$, conținută în D .

Exemplu:

Interiorul unei sfere este un domeniu simplu conex în $\mathbf{R}^3$.

Vom da în continuare condiții necesare și suficiente pentru ca o integrală curbilinie să nu depindă de drum.

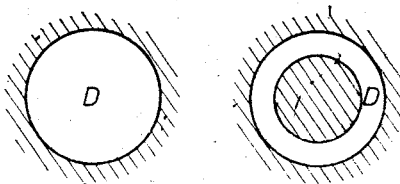


Fig. 37.

Aceste condiții sînt date de:

Teorema 1.9.

Fie P, Q și R trei funcții reale definite și continue pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbb{R}^3$. Următoarele afirmații sînt echivalente:

1) Există o funcție $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, diferențiabilă, astfel încît

$$dV(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz;$$

$$(\forall) (x, y, z) \in D \quad (8)$$

2) Integrala curbilinie a funcției vectoriale

$$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

este nulă pe orice curbă Γ simplă, închisă, netedă pe porțiuni cu $I(\Gamma) \subset D$.

3) Pentru orice două puncte M_0 și M din D , integrala curbilinie a lui $\vec{F}$ pe orice două curbe simple și netede cu imaginile în D , de capete M_0 și M , este aceeași.

Demonstrație

Să arătăm că afirmația 1) implică afirmația 3). Fie $M(x, y, z)$ și $M_0(x_0, y_0, z_0)$ două puncte arbitrare, dar fixate, din D .

Fie Γ_{M_0M} o curbă simplă, netedă avînd capetele M_0 și M , definită de următoarea reprezentare parametrică.

$$x = f(\tau); y = g(\tau); z = h(\tau); \tau \in [t_0, t] \text{ și } \Gamma_{M_0M}$$

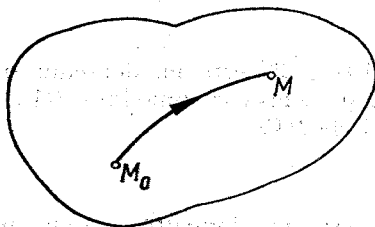


Fig. 38

$I(\Gamma_{M_0M}) \subset D$. Dacă ținem seama de condiția 1), de teorema 1.8 și de regula de derivare a unei funcții compuse, avem:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{M_0M}} P dx + Q dy + R dz &= \int_{\Gamma_{M_0M}} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz = \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{df}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dg}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dh}{d\tau} \right) d\tau = \int_{t_0}^t \frac{d}{d\tau} V(f(\tau), g(\tau), h(\tau)) d\tau = \\ &= V(f(t), g(t), h(t)) - V(f(t_0), g(t_0), h(t_0)) = V(M) - V(M_0) \end{aligned}$$

și deci valoarea integralei curbilinii a lui $\vec{F}$ depinde numai de punctele M_0 și M .

Invers, din afirmația 3) să arătăm că rezultă afirmația 1).

Pentru aceasta vom considera un punct arbitrar $M_0(x_0, y_0, z_0)$, dar fixat, din D .

Fie $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ o funcție vectorială pentru care valoarea integralei curbilinii pe orice curbă netedă de capete M_0 și M (punct arbitrar din D) nu depinde de curbă dar depinde de punctul M . În acest mod există funcția

$$V(x, y, z) = V(M) = \int_{\Gamma_{M_0 M}} P dx + Q dy + R dz$$

Vom arăta că funcția V verifică afirmația 1); pentru aceasta trebuie demonstrat că:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R \text{ pe } D$$

Dovedim numai prima dintre aceste egalități.

Deoarece D este domeniu, există o sferă cu centrul în punctul $M(x, y, z)$ conținută în D . În această sferă considerăm punctul $M'(x+h, y, z)$ și notăm cu $\Gamma_{MM'}$ segmentul de dreaptă determinat de punctele M și M' . Avem:

$$V(x+h, y, z) = \int_{\Gamma_{M_0 M'} \cup \Gamma_{MM'}} P dx + Q dy + R dz$$

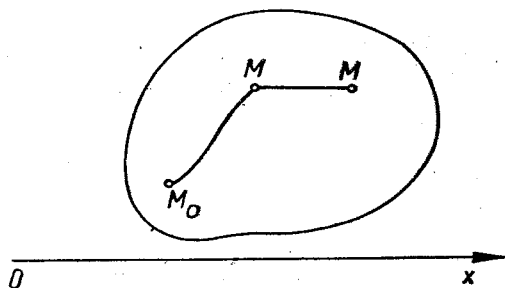


Fig. 39

și dacă ținem seama de proprietățile integralei curbilinii de al doilea tip obținem:

$$V(x+h, y, z) - V(x, y, z) = \int_{\Gamma_{MM'}} P dx + Q dy + R dz$$

Dar y și z sînt constante pe MM' , deci

$$V(x+h, y, z) - V(x, y, z) = \int_x^{x+h} P(t, y, z) dt.$$

Funcția P este continuă pe D , deci putem aplica formula de medie pentru integrale și obținem:

$$V(x+h, y, z) - V(x, y, z) = hP(x + \theta h, y, z); \quad 0 < \theta < 1$$

Atunci, folosind din nou continuitatea funcției P , rezultă:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h, y, z) - V(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$$

pentru orice $(x, y, z) \in D$, adică $\frac{\partial V}{\partial x} = P$ pe D

În mod asemănător se arată că $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$ și $\frac{\partial V}{\partial z} = R$ pe D și deci 3) $\rightarrow$ 1).

Echivalența lui 2) cu 3) este imediată.

Presupunem adevărată afirmația 2).

Fie Γ' și Γ'' două curbe netede cu imaginile în D și a căror capete sînt punctele M_0 și M .

Considerăm curba $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$. Prin ipoteză avem:

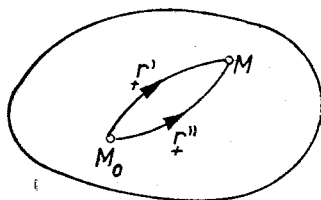


Fig. 40.

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = 0; \text{ dar } \oint_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''}$$

și deci

$$\int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = 0, \text{ de unde rezultă } \int_{\Gamma'} = -\int_{\Gamma''}$$

Prin urmare 2) $\Rightarrow$ 3). Să arătăm că 3) $\Rightarrow$ 2). Fie Γ o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni cu imaginea conținută în D . Putem pune $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ unde Γ' și Γ'' sînt două curbe avînd aceleași capete. Avem:

$$\oint_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''} = \int_{\Gamma'} - \int_{\Gamma'}$$

Prin ipoteza $\int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''}$, de unde rezultă $\oint_{\Gamma} = 0$, deci 3) $\Rightarrow$ 2) și teorema este demonstrată.

Prima afirmație din teorema 1.9 arată că problema independenței de drum a integralei curbilinii revine la problema recunoașterii faptului că expresia de sub semnul integrală este diferențiala unei funcții de trei variabile.

Pentru a da un răspuns la această problemă dăm mai întîi.

Definiția 3.9.

Fie P, Q și R trei funcții reale definite și continue pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^3$. Spunem că expresia diferențială:

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (9)$$

este o diferențială totală exactă dacă există o funcție

$V: D \rightarrow \mathbb{R}$, diferențiabilă pe D astfel încît:

$$dV(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \text{ pentru orice } (x, y, z) \in D.$$

Cu această ultimă noțiune dacă ținem seama de teorema 1.9, integrala curbilinie de al doilea tip este independentă de drum, dacă și numai dacă expresia diferențială care apare sub semnul integrală, este o diferențială totală exactă.

Un răspuns la problema formulată mai înainte este dat de:

Teorema 2.9.

Fie P, Q și R trei funcții reale definite pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbf{R}^3$ și admitând derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D . Expresia diferențială

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \quad (9)$$

este o diferențială totală exactă dacă și numai dacă pe D au loc egalitățile

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Demonstrație Presupunem că expresia diferențială (9) este o diferențială totală exactă și deci există o funcție $V: D \rightarrow \mathbf{R}$, diferențiabilă astfel încât

$$dV(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

$$(\forall) (x, y, z) \in D$$

Dacă scriem diferențiala funcției V , obținem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R$$

Despre funcțiile P, Q și R am propus că admit derivate parțiale de ordinul întâi continue, fapt care garantează existența și continuitatea tuturor derivatelor mixte de ordinul doi ale funcției V . Au loc egalitățile:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial P}{\partial y}; & \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial P}{\partial z}; & \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial x}; \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial Q}{\partial z}; & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial R}{\partial x}; & \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial R}{\partial y} \end{aligned}$$

Prin simpla aplicare a criteriului lui Schwarz de egalitate a derivatelor mixte deducem egalitățile din enunț.

Reciproc, presupunem că au loc egalitățile din enunț și să arătăm că există o funcție V astfel încât:

$$dV = P dx + Q dy + R dz \text{ pe } D$$

Funcția V o construim în felul următor:

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat din D și $M(x, y, z)$ un punct arbitrar din D . Considerăm

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(t, y_0, z_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z R(x, y, t) dt$$

Trebuie dovedite egalitățile $\frac{\partial V}{\partial x} = P$; $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$; $\frac{\partial V}{\partial z} = R$

Avem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t) dt$$

Dacă ținem seama de egalitățile din enunț avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, t, z_0) dt + \int_{z_0}^z \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, t) dt = \\ &= P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) - \\ &\quad - P(x, y, z_0) = P(x, y, z) \end{aligned}$$

unde am folosit regula de derivare sub semnul integrală și formula lui Newton-Leibniz.

În mod analog se demonstrează și egalitățile:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R$$

Observația 1.

În cazul integralelor curbilinii independente de drum se mai folosește și notația

$$\int_{M_1(x_1, y_1, z_1)}^{M_2(x_2, y_2, z_2)} P dx + Q dy + R dz$$

care pune în evidență doar capetele M_1 și M_2 ale curbelor pe care se consideră integrala.

Observația 2.

Referitor la expresiile diferențiale de forma

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

are loc:

Teorema 3.9. Fie P și Q două funcții reale definite pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbf{R}^2$ și admitînd derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D . Expresia diferențială:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

este o diferențială totală exactă dacă și numai dacă pe D are loc egalitatea:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Demonstrația acestei teoreme urmează aceleași etape ca și demonstrația teoremei 2.9 unde se consideră

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y R(x, t) dt$$

Observația 3.

Condiția ca domeniul să fie simplu conex, este esențială așa cum rezultă din următorul exemplu:

Fie $D = \left\{ (x, y); \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 2 \right\}$ și curba Γ definită de reprezentarea parametrică

$$x = \cos t; y = \sin t; t \in [0, 2\pi].$$

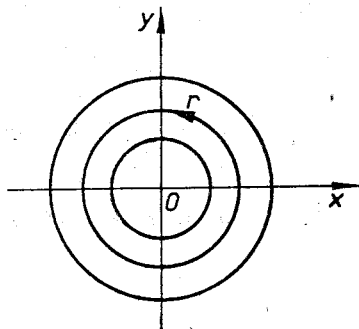


Fig. 41

Se vede imediat că D nu este un domeniu simplu conex. Fie $\bar{V}: D \rightarrow \mathbf{R}$ funcția vectorială definită prin

$$\bar{V}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \bar{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \bar{j}$$

În acest caz avem $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ și $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Funcțiile P și Q admit derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D și are loc egalitatea:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Totuși:

$$\oint_{\Gamma+} P dx + Q dy = \oint_{\Gamma+} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0$$

Probleme

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

$$1) \int_{\Gamma+} \frac{dx}{x^3 + y^3}, \text{ unde } \Gamma: x = a \cos t; y = a \sin t; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$R: -\frac{2\pi\sqrt{3}}{9a^2}$$

$$2) \int_{\Gamma_+} (\arcsin y) dx + x^3 dy, \text{ unde } \Gamma: x = -t; y = \sqrt{1-t^2}; t \in [-1, 1].$$

$$R: \frac{3\pi}{8} - \mathbf{X}$$

$$3) \int_{\Gamma_+} \sqrt{yz} dx + \sqrt{zx} dy + \sqrt{xy} dz, \text{ unde } \Gamma: x = t; y = t^2; z = t^3; t \in [0, 1].$$

$$R: \frac{61}{42}$$

$$4) \int_{\Gamma_+} z \sqrt{a^2 - x^2} dx + xz dy + (x^2 + y^2) dz, \text{ unde } \Gamma:$$

$$x = a \cos t; y = a \sin t; z = bt; t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$R: \frac{a^2 b}{2} (\pi - 1).$$

5) $\int_{\Gamma_-} (y+1) dx + x^2 dy$, unde $I(\Gamma)$ este porțiunea din parabola $y = x^2 - 1$ cuprinsă între punctele $A(1, 0)$ și $B(-1, 0)$ și $I(\Gamma)$ are originea în punctul A .

$$R: \frac{2}{3}.$$

6) $\oint_{\Gamma_+} y dx - (x-a) dy$, unde Γ este elipsa $\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > 0, b > 0$.

$$R: -2\pi ab.$$

7) $\int_{\Gamma_+} \sqrt{y^2 + z^2} dx + \sqrt{z^2 + x^2} dy + \sqrt{x^2 + y^2} dz$, unde $I(\Gamma)$ este segmentul de dreapta AB cu $A = (-1, -1, -1)$ și $B = (2, 2, 2)$, iar A este originea.

$$R: \frac{15\sqrt{2}}{2}.$$

8) $\oint_{\Gamma_+} (y-2z) dx + (x-z) dy + (2x-y) dz$, unde $I(\Gamma)$ este cercul din spațiu obținut prin intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) cu planul $x - y + z = 0$, iar Γ are originea și capătul în punctul $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-a}{\sqrt{2}}\right)$.

Indicație: Pentru $I(\Gamma)$ se obține următoarea reprezentare parametrică

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t + \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t; \quad y = \frac{2a}{\sqrt{6}} \sin t; \quad z = \frac{a}{\sqrt{6}} \sin t - \frac{a}{\sqrt{2}} \cos t \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$R: \frac{4a^2 \sqrt{3}}{3}$$

Verificând în prealabil ca expresia de sub semnul integrală să fie o diferențială totală, să se calculeze următoarele integrale curbilinii în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare.

$$9) \int_{(0,2)}^{(2,0)} y^2 e^x dx + 2y e^x dy. \quad R: -4.$$

$$10) \int_{(\frac{1}{2}, 2)}^{(9, 1)} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{y}{x}} dx + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{y}} dy, \text{ luată pe o curbă cu imaginea în primul cadran } (x > 0, y > 0).$$

$$R: 2.$$

$$11) \int_{(1, 2)}^{(-3, -2)} \frac{y^2}{(x-y)^2} dx - \frac{x^2}{(x-y)^2} dy, \text{ luată pe o curbă a cărei imagine nu intersectează prima bisectoare.}$$

$$R: 4.$$

$$12) \int_{(0, 0, 0)}^{(-2, 1, 5)} x^2 dx + \sqrt{y} dy - z \sqrt{z} dz, \text{ luată pe o curbă cu imaginea aflată în regiunea } y \geq 0; z \geq 0.$$

$$R: -2(1 + 5\sqrt{5}).$$

$$13) \int_{(1, -2, 2)}^{(0, 3, 4)} \frac{x dx + y dy + z dz}{(x^2 + y^2 + z^2) \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ luată pe o curbă a cărei imagine nu trece prin originea coordonatelor.}$$

$$R: \frac{2}{15}.$$

$$14) \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 2, 2)} \frac{y^2 z^2 dx + 2x^2 z dy + 2x^2 y dz}{(2x + yz)^2}, \text{ luată pe o curbă a cărei imagine nu traversează suprafața de ecuație } 2x + yz = 0.$$

$$R: \frac{2}{3}.$$

CAPITOLUL VIII INTEGRALE DUBLE

§ 1. DEFINIȚIA INTEGRALEI DUBLE

Definiție 1.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu. Reuniunea dintre un domeniu și frontiera sa se numește domeniu închis. Un domeniu închis și mărginit se numește domeniu compact.

Pe dreapta reală, orice domeniu este un interval, pe când în plan sau în spațiu există domenii care nu sînt intervale. Unele domenii din plan sau spațiu au o structură mult deosebită de aceea a unui interval. Din această cauză vom considera numai acele domenii care au arie. Cadrul firesc în care se definește integrala dublă este acela al domeniilor compacte a căror frontieră este o reuniune finită de imagini de curbe netede. În tot ce urmează convenim să spunem că frontiera unui astfel de domeniu este o curbă netedă pe porțiuni. Se demonstrează că astfel de domenii au arie, [24].

În continuare vom considera numai domenii de acest fel. Fie $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, o funcție reală definită și mărginită pe domeniul compact D .

Dacă presupunem că f este pozitivă, $f(x, y) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in D$, atunci graficul său este o suprafață S situată deasupra planului xOy și proiecția lui S pe planul xOy este domeniul D .

Pentru a afla volumul cilindrului care se sprijină pe D și este limitat superior de S sînt necesare cîteva noțiuni.

Definiții 2.1.

Prin diametrul unei mulțimi $A \subset \mathbb{R}^2$, notat cu $d(A)$ înțelegem marginea superioară a mulțimii de distanțe între diferitele puncte ale lui A . Avem deci

$$d(A) = \sup_{M, N \in A} d(M, N)$$

unde $d(M, N)$ este distanța dintre două puncte M și N aparținînd lui A .

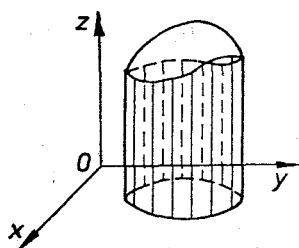


Fig. 42

Exemplu de diametru al unei mulțimi date este ilustrat în figura 43.

Definiție 3.1. Prin diviziune $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ a domeniului compact D înțelegem un număr finit de domenii compacte $D_1, D_2, \dots, D_n$ fără puncte interioare comune, astfel încât

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$$

și $\text{Fr}D_i (i = 1, 2, \dots, n)$ este o curbă închisă netedă sau netedă pe porțiuni.

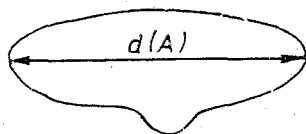


Fig. 43

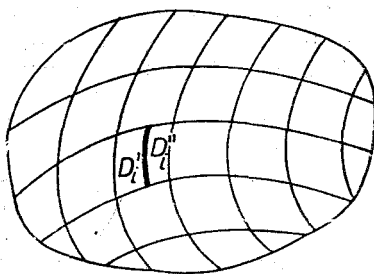


Fig. 44

Prin norma unei diviziuni $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$, notată cu $v(\Delta)$, înțelegem numărul pozitiv dat de egalitatea $v(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$.

Fie Δ_1 și Δ_2 două diviziuni ale domeniului compact D .

Spunem că diviziunea Δ_2 este mai fină decât diviziunea Δ_1 și vom scrie $\Delta_1 \subset \Delta_2$ dacă orice domeniu al diviziunii Δ_1 , sau coincide cu un domeniu al diviziunii Δ_2 , sau este egal cu o reuniune finită de domenii ale diviziunii Δ_2 .

În fig. 44 am considerat două diviziuni

$$\Delta_1 = (D_1, \dots, D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, \dots, D_n)$$

$$\Delta_2 = (D_1, \dots, D_{i-1}, D_i', D_i'', D_{i+1}, \dots, D_n)$$

În acest caz avem $D_i = D_i' \cup D_i''$ iar celelalte domenii ale diviziunii Δ_1 coincid cu domenii ale diviziunii Δ_2 și deci $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Dacă $\Delta_1 \subset \Delta_2$, atunci are loc inegalitatea $v(\Delta_1) \geq v(\Delta_2)$.

Reciproc nu este adevărat, dacă Δ_1 și Δ_2 sînt două diviziuni ale lui D și $v(\Delta_1) > v(\Delta_2)$ nu rezultă că $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact D și funcția reală f definită și mărginită pe D . Vom nota cu

$$m_i = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x, y) \quad M_i = \sup_{(x,y) \in D_i} f(x, y)$$

$$m = \inf_{(x,y) \in D} f(x, y) \quad M = \sup_{(x,y) \in D} f(x, y)$$

au loc inegalitățile

$$m \leq f(x, y) \leq M \quad (\forall) \quad (x, y) \in D$$

$$m_i \leq f(x, y) \leq M_i \quad (\forall) \quad (x, y) \in D_i$$

Formăm sumele

$$s_{\Delta}(f) = m_1 \text{ aria } D_1 + \dots + m_n \text{ aria } D_n = \sum_{i=1}^n m_i \text{ aria } D_i$$

$$S_{\Delta}(f) = M_1 \text{ aria } D_1 + \dots + M_n \text{ aria } D_n = \sum_{i=1}^n M_i \text{ aria } D_i$$

Sumele $s_{\Delta}(f)$ și $S_{\Delta}(f)$ se numesc sumele Darboux, ale funcției f corespunzătoare diviziunii Δ , $s_{\Delta}(f)$ se numește suma inferioară Darboux iar $S_{\Delta}(f)$ se numește suma superioară Darboux. Dacă considerăm în fiecare domeniu D_i cîte un punct $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, atunci putem forma suma

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) &= f(\xi_1, \eta_1) \text{ aria } D_1 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \text{ aria } D_n = \\ &= \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } D_i \end{aligned}$$

care se numește suma Riemann a funcției f corespunzătoare diviziunii Δ și punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Trebuie observat că pentru aceeași diviziune Δ putem forma o infinitate de sume Riemann, corespunzătoare diferitelor moduri de alegere a punctelor (ξ_i, η_i) , dar numai două sume Darboux, $s_{\Delta}(f)$ și $S_{\Delta}(f)$.

Sumele Darboux și Riemann au următoarele proprietăți:

1) Au loc inegalitățile

$$m \text{ aria } D \leq s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) \leq S_{\Delta}(f) \leq M \text{ aria } D.$$

În adevăr, oricare ar fi punctul intermediar $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$, avem

$$m \leq m_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \leq M_i \leq M \text{ pentru } i = 1, 2, \dots, n$$

Înmulțind toți termenii cu numărul pozitiv $\text{aria } D_i$, obținem

$$m \text{ aria } D_i \leq m_i \text{ aria } D_i \leq f(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } D_i \leq M_i \text{ aria } D_i \leq M \text{ aria } D_i$$

Adunînd membru cu membru cele n inegalități scrise pentru $i = 1, 2, \dots, n$ obținem rezultatul dorit.

2) Legătura dintre sumele Darboux și sumele Riemann corespunzătoare unei diviziuni Δ este dată de egalitățile

$$s_{\Delta}(f) = \inf_{(\xi_i, \eta_i)} \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i)$$

$$S_{\Delta}(f) = \sup_{(\xi_i, \eta_i)} \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i)$$

unde marginea inferioară și cea superioară se consideră după toate alegerile posibile ale punctelor intermediare (ξ_i, η_i) .

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ o diviziune a domeniului D și $\varepsilon > 0$, arbitrar dar fixat.

Deoarece $m_i = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x,y)$ în fiecare domeniu D_i există un punct (ξ_i, η_i) așa fel încît

$$f(\xi_i, \eta_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}. \text{ Atunci,}$$

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n (f(\xi_i, \eta_i) - m_i) \text{ aria } D_i \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \sum_{i=1}^n \text{aria } D_i = \varepsilon$$

deci

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - \varepsilon \leq s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i)$$

adică

$$s_{\Delta}(f) = \inf_{(\xi_i, \eta_i)} \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i)$$

La fel se demonstrează și cea de a doua egalitate.

3) Dacă Δ_1 și Δ_2 sînt două diviziuni oarecare ale domeniului D , cu $\Delta_1 \subset \Delta_2$ atunci

$$s_{\Delta_1}(f) \leq s_{\Delta_2}(f) \leq S_{\Delta_2}(f) \leq S_{\Delta_1}(f)$$

adică prin trecerea la o diviziune mai fină sumele inferioare cresc, iar sumele superioare descresc.

Fie D_i un domeniu al diviziunii Δ_1 și presupunem că $D_i = D'_i \cup D''_i$, unde D'_i și D''_i sînt domenii ale diviziunii Δ_2 .

Să notăm

$$m_i = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x,y), \quad m'_i = \inf_{(x,y) \in D'_i} f(x,y),$$

$$m''_i = \inf_{(x,y) \in D''_i} f(x,y)$$

Evident au loc inegalitățile

$$m_i \leq m'_i \quad \text{și} \quad m_i \leq m''_i$$

deci $m_i \text{ aria } D'_i \leq m'_i \text{ aria } D'_i$ și $m_i \text{ aria } D''_i \leq m''_i \text{ aria } D''_i$. Prin adunarea membru cu membru a ultimelor două inegalități obținem

$$m_i \text{ aria } D_i \leq m'_i \text{ aria } D'_i + m''_i \text{ aria } D''_i.$$

O inegalitate asemănătoare rămîne valabilă dacă D_i este reuniunea finită a trei sau mai multe domenii ale diviziunii Δ_2 . Procedînd la fel cu fiecare din domeniile diviziunii Δ_1 și sumînd membru cu membru inegalitățile obținute, rezultă

$$s_{\Delta_1}(f) \leq s_{\Delta_2}(f) \leq S_{\Delta_2}(f)$$

Inegalitatea $S_{\Delta_1}(f) \leq S_{\Delta_2}(f)$ se demonstrează asemănător.

4) Pentru orice două diviziuni Δ_1 și Δ_2 ale lui D are loc inegalitatea

$$s_{\Delta_1}(f) \leq S_{\Delta_2}(f)$$

adică orice sumă inferioară este mai mică decît orice sumă superioară.

5) Dacă $\mathfrak{D}$ este mulțimea tuturor diviziunilor domeniului compact D , atunci mulțimea

$$(s_{\Delta}(f))_{\Delta \in \mathfrak{D}}$$

este mărginită superior, iar mulțimea

$$(S_{\Delta}(f))_{\Delta \in \mathfrak{D}}$$

este mărginită inferior, și are loc inegalitatea

$$\sup_{\Delta \in \mathfrak{D}} s_{\Delta}(f) \leq \inf_{\Delta \in \mathfrak{D}} S_{\Delta}(f)$$

În adevăr, fie Δ_0 o diviziune oarecare a lui D . Pentru orice diviziune Δ a lui D avem

$$s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta_0}(f)$$

deci mulțimea $(s_{\Delta}(f))_{\Delta \in \mathfrak{D}}$ este majorată de $S_{\Delta_0}(f)$ și deci are o margine superioară finită pe care o notăm cu I .

În mod asemănător se arată că mulțimea $(S_{\Delta}(f))_{\Delta \in \mathfrak{D}}$ este minorată și deci are o margine inferioară finită pe care o notăm cu $\bar{I}$.

Între cele două numere are loc inegalitatea $I \leq \bar{I}$.

Numerele $I = \sup_{\Delta \in \mathfrak{D}} s_{\Delta}(f)$ și $\bar{I} = \inf_{\Delta \in \mathfrak{D}} S_{\Delta}(f)$ se numesc integralele Darboux ale funcției f pe domeniul D . I se numește integrala inferioară Darboux, iar $\bar{I}$ se numește integrala superioară Darboux.

Pentru orice diviziune Δ a lui D au loc inegalitățile evidente

$$s_{\Delta}(f) \leq I \leq \bar{I} \leq S_{\Delta}(f)$$

6) În cazul în care $f \geq 0$ pe D , suma inferioară Darboux reprezintă volumul corpului format prin reuniunea a n cilindroizi având ca baze pe $D_1, D_2, \dots, D_n$ și înălțimile egale respectiv cu $m_1, \dots, m_n$. Volumul astfel obținut aproximează prin lipsă volumul căutat. În mod asemănător, suma

superioară Darboux reprezintă volumul corpului format prin reuniunea a n cilindroizi având ca baze pe $D_1, D_2, \dots, D_n$ și înălțimile egale respectiv cu $M_1, \dots, M_n$. Volumul astfel obținut aproximează prin adaus, volumul căutat. În cazul sumelor Riemann acestea aproximează volumul căutat, dar nu mai putem preciza dacă prin lipsă sau prin adaus.

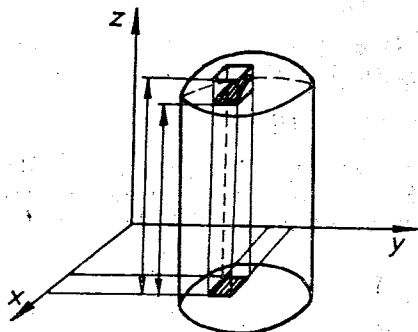


Fig. 45

Definiție. 4.1. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$.

Spunem că f este integrabilă Riemann pe D , dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$ să avem $|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon$.

În acest caz numărul I se numește integrala Riemann a funcției f pe domeniul D și se folosește notația

$$I = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Dacă $f \geq 0$ pe D , atunci $\iint_D f(x, y) dx dy$ reprezintă volumul cilindrului de care am pomenit la începutul acestui paragraf.

§ 2. CRITERII DE INTEGRABILITATE

Teorema 1.2. (Criteriul lui Darboux). Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$. Funcția f este integrabilă pe D dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ a lui D , cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ să avem

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Dacă f este o funcție mărginită și integrabilă pe domeniul compact D , fie

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy$$

Din definiția integrabilității avem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât oricare ar fi diviziunea Δ cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare (ξ_i, η_i) are loc inegalitatea $|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon$ sau

$$I - \varepsilon < \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) < I + \varepsilon$$

Folosind legătura dintre sumele Darboux și sumele Riemann obținem inegalitatea

$$I - \varepsilon < s_{\Delta}(f) \leq S_{\Delta}(f) \leq I + \varepsilon$$

și deci

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \leq I + \varepsilon - (I - \varepsilon) = 2\varepsilon;$$

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \leq 2\varepsilon$$

pentru orice diviziune Δ cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$.

Prin urmare dacă f este integrabilă pe D atunci este îndeplinită condiția din enunț.

Condiția este suficientă. Să arătăm deci că funcția f , mărginită pe D , este integrabilă dacă este îndeplinită condiția din enunț.

Din proprietățile sumelor Darboux avem

$$s_{\Delta}(f) \leq I \leq \bar{I} \leq S_{\Delta}(f)$$

pentru orice diviziune Δ a lui D .

Dacă $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, din inegalitatea de mai sus și din condiția dată în enunț, obținem

$$0 \leq \bar{I} - I \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$$

adică $0 \leq \bar{I} - I < \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost presupus arbitrar rezultă că $\bar{I} = I$. Să notăm $I = \bar{I} = I$, valoarea comună a integralelor Darboux. Avem

$$s_{\Delta}(f) \leq I \leq S_{\Delta}(f) \text{ și } s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) \leq S_{\Delta}(f)$$

de unde

$$s_{\Delta}(f) - S_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - I \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f)$$

sau

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - I| \leq S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f)$$

Dacă $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ atunci $S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon$ și deci

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon$$

adică funcția f este integrabilă pe D și $\iint_D f(x, y) dx dy = I$.

Observație. Din criteriul lui Darboux rezultă că o funcție reală f , definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$, este integrabilă pe D , dacă și numai dacă integralele Darboux corespunzătoare, I și $\bar{I}$ sînt egale. Valoarea comună a celor două integrale $I = \bar{I} = I$ este tocmai integrala lui f pe domeniul D .

Cu ajutorul criteriului lui Darboux se demonstrează integrabilitatea funcțiilor continue, așa cum rezultă din:

Teorema 2.2. Orice funcție reală f , definită și continuă pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$, este integrabilă pe D .

Demonstrație. Fie $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ o diviziune oarecare a lui D . Deoarece f este presupusă continuă pe D , va fi continuă pe fiecare domeniu compact D_i ($i = 1, \dots, n$). Atunci funcția f este mărginită pe D_i și își atinge marginile; există deci două puncte $A'_i(x'_i, y'_i)$ și $A''_i(x''_i, y''_i)$ din D_i , astfel încît

$$m_i = f(x'_i, y'_i), \quad M_i = f(x''_i, y''_i)$$

Rezultă atunci

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \text{ aria } D_i = \sum_{i=1}^n (f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i)) \text{ aria } D_i$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D , este uniform continuă pe D . Numărului $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice două puncte $A'(x', y')$ și $A''(x'', y'')$ cu $d(A', A'') < \delta(\varepsilon)$ să avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}$$

Pentru orice diviziune Δ , cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ avem

$$d(A'_i, A''_i) < \delta(\varepsilon)$$

și deci

$$|f(x'_i, y'_i) - f(x''_i, y''_i)| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}$$

Așadar, dacă $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ atunci

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) \leq \sum_{i=1}^n |f(x''_i, y''_i) - f(x'_i, y'_i)| \text{aria } D_i \leq \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \text{aria } D = \varepsilon$$

adică

$$S_{\Delta}(f) - s_{\Delta}(f) < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad (\forall) \Delta, \text{ cu } v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$$

și deci f este integrabilă pe D .

Criteriul lui Lebesgue

Pentru a enunța acest criteriu avem nevoie de noțiunea de mulțime neglijabilă sau de măsură Lebesgue nulă.

Definiție. Spunem că mulțimea $E \subset \mathbf{R}^2$ este de măsură Lebesgue nulă sau neglijabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un șir (I_n) de intervale deschise, din $\mathbf{R}^2$, care acoperă pe E , adică $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aria } I_n < \varepsilon$$

Cu această definiție putem enunța următoarea:

Teoremă 3.2. (Criteriul lui Lebesgue). Fie f o funcție reală și mărginită, definită pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$. Funcția f este integrabilă pe D dacă și numai dacă mulțimea punctelor de discontinuitate ale lui f este de măsură Lebesgue nulă.

Ca o primă consecință a acestui criteriu, se vede imediat că mulțimea funcțiilor integrabile este mult mai bogată decît mulțimea funcțiilor continue. Pentru demonstrație vezi [24].

§ 3. PROPRIETĂȚILE INTEGRALEI DUBLE

La fel ca și în cazul integralei simple se demonstrează următoarele proprietăți:

1. Dacă funcția f este integrabilă pe D și $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci și funcția λf este integrabilă pe D și are loc egalitatea

$$\iint_D \lambda f(x, y) \, dx \, dy = \lambda \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Aceasta este proprietatea de omogenitate a integralei duble.

2. Dacă f și g sînt două funcții integrabile pe D , atunci și funcțiile $f \pm g$ sînt integrabile pe D și are loc egalitatea

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y)) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy \pm \iint_D g(x, y) dx dy$$

Aceasta este proprietatea de linearitate a integralei duble.

3. Dacă $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sînt domenii compacte iar D_1 și D_2 nu au puncte interioare comune și f integrabilă pe D , atunci

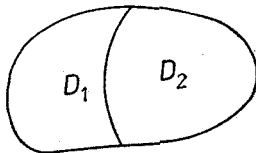


Fig. 46

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

Aceasta este proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcție de domeniu.

4. Dacă f este integrabilă pe D și $f(x, y) \geq 0$; $(\forall) (x, y) \in D$ atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq 0$$

5. Dacă f și g sînt integrabile pe D și $f(x, y) \geq g(x, y)$; $(\forall) (x, y) \in D$ atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy \geq \iint_D g(x, y) dx dy$$

Aceasta este proprietatea de monotonie a integralei duble.

6. Dacă $m \leq f \leq M$ pe D și f este integrabilă pe D , atunci

$$m \cdot \text{aria } D \leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq M \cdot \text{aria } D$$

7. Dacă f este integrabilă pe D atunci și $|f|$ este integrabilă pe D și are loc inegalitatea

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

8. Este evidentă egalitatea

$$\iint_D dx dy = \text{aria } D$$

9. Teorema de medie pentru integrala dublă.

Dacă f este continuă pe domeniul compact D , atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$, astfel încît

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = f(\xi, \eta) \text{ aria } D$$

Demonstrație. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D , rezultă că f este mărginită pe D , și își atinge marginile. Există două puncte $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ din D astfel încît $m = f(x_1, y_1)$ și $M = f(x_2, y_2)$ unde M, m sînt marginile lui f . Avem în baza proprietății 6)

$$m \text{ aria } D \leq \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \leq M \text{ aria } D$$

de unde rezultă

$$m \leq \frac{\iint_D f(x, y) \, dx \, dy}{\text{aria } D} \leq M$$

Notînd

$$\mu = \frac{\iint_D f(x, y) \, dx \, dy}{\text{aria } D} ; \text{ avem } m \leq \mu \leq M$$

Fie Γ o curbă a cărei imagine este complet conținută în D și avînd capetele în A_1 și A_2 . Existența unei astfel de curbe rezultă chiar din definiția noțiunii de domeniu.

Dacă

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned} \quad t \in [a, b]$$

este reprezentarea parametrică a lui Γ atunci funcția compusă

$$g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$$

este continuă pe compactul $[a, b]$. Din $f(x_1, y_1) = m$ și $f(x_2, y_2) = M$ rezultă $g(a) = m$ și $g(b) = M$.

Din proprietatea lui Darboux a funcțiilor continue deducem existența unei valori $t_0 \in [a, b]$ așa fel încît $g(t_0) = \mu$, adică

$$f(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = \mu$$

Dacă luăm $\xi = \varphi(t_0)$ și $\eta = \psi(t_0)$ avem $\mu = f(\xi, \eta)$ și formula este demonstrată.

§ 4. CALCULUL INTEGRALEI DUBLE

Vom arăta, în anumite ipoteze, că o integrală dublă se calculează printr-o succesiune de integrale simple.

Pentru început vom considera cazul în care D este un interval bidimensional $I = [a, b] \times [c, d]$.

Teorema 1.4. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un interval bidimensional $I = [a, b] \times [c, d]$. Să presupunem că

1. f este integrabilă pe I
2. pentru orice $x \in [a, b]$, există integrala

$$\int_c^d f(x, y) dy = F(x).$$

În aceste condiții, există integrala $\int_a^b F(x) dx$ și are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

Demonstrație.

Fie $d' = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $d'' = (c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_m = d)$ o diviziune a intervalului $[c, d]$. Cu ajutorul diviziunilor d' și d'' putem defini o diviziune Δ a lui I , unde domeniile lui Δ sînt intervalele $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$; $j = 0, 1, \dots, m-1$). Vom nota $m_{ij} = \inf_{(x, y) \in I_{ij}} f(x, y)$ și $M_{ij} = \sup_{(x, y) \in I_{ij}} f(x, y)$.

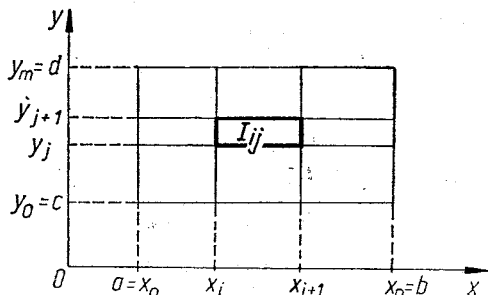


Fig. 47

Pentru a arăta că funcția F este integrabilă pe $[a, b]$ considerăm sumele Riemann asociate lui F pe $[a, b]$. Avem

$$\sigma_{d'}(F, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) (x_{i+1} - x_i)$$

Dacă ținem seama de modul cum este definită funcția F și de proprietatea de aditivitate a integralei simple avem

$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) dy.$$

Aplicînd formula de medie pentru integrala simplă rezultă existența unui număr μ_{ij} , cu $m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij}$, astfel încît

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y) dy = \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j)$$

Deci pentru sumele Riemann asociate lui F pe $[a, b]$ avem

$$\begin{aligned} \sigma_{a'}(F, \xi_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i) (x_{i+1} - x_i) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \left(\sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j) \right) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de inegalitățile

$$m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m-1)$$

rezultă

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) &\leq \sigma_{a'}(F, \xi_i) \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) \end{aligned}$$

Dar prima sumă din aceste inegalități este tocmai suma Darboux inferioară relativ la funcția f și la diviziunea Δ a lui I ;

$$s_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

Ultima sumă din inegalitățile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară relativ la funcția f și diviziunea Δ a lui I

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

Avem deci inegalitățile

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{a'}(F, \xi_i) \leq S_{\Delta}(f)$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i .

Fie acum (d'_k) un șir oarecare de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $v(d'_k) \rightarrow 0$ și (d''_k) un șir de diviziuni ale lui $[c, d]$ cu $v(d''_k) \rightarrow 0$. Notăm cu Δ_k diviziunea lui I definită, ca mai sus, de diviziunile d'_k și d''_k . Se vede imediat că din condițiile $v(d'_k) \rightarrow 0$ și $v(d''_k) \rightarrow 0$ rezultă $v(\Delta_k) \rightarrow 0$. Pentru fiecare k avem inegalitățile

$$s_{\Delta_k}(f) \leq \sigma_{a'_k}(F, \xi_i) \leq S_{\Delta_k}(f) \quad (1)$$

Funcția f fiind presupusă integrabilă pe I , aplicînd observația de la criteriul lui Darboux, avem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{\Delta_k}(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{\Delta_k}(f) = \iint_I f(x, y) dx dy \quad (2)$$

Trecînd la limită în (1) și ținînd cont de (2) obținem

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{d'_k}(F, \xi_i) = \iint_I f(x, y) \, dx \, dy \quad (3)$$

Dacă țineam seama de definiția integralei pentru funcțiile reale, de o singură variabilă, se vede imediat că

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{d'_k}(F, \xi_i) = \int_a^b F(x) \, dx \quad (4)$$

Din egalitățile (3) și (4) obținem

$$\iint_I f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b F(x) \, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

De obicei se folosește notația

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) \, dy$$

Observația 1. În mod asemănător se demonstrează

Teorema 2.4. Fie f o funcție definită și mărginită pe $I = [a, b] \times [c, d]$. Să presupunem că

1) f este integrabilă pe I

2) pentru orice $y \in [c, d]$ există integrala $\int_a^b f(x, y) \, dx = G(y)$. În aceste condiții există integrala

$$\int_c^d G(y) \, dy \text{ și are loc egalitatea}$$

$$\iint_I f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Observația 2. Dacă $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ atunci

$$\iint_I f(x, y) \, dx \, dy = \left(\int_a^b g(x) \, dx \right) \left(\int_c^d h(y) \, dy \right).$$

Observația 3. Interpretarea geometrică a teoremei 1.4.

Teorema 1.4. are o interpretare geometrică simplă, ilustrată în fig. 48. Dacă f este o funcție pozitivă pe I , atunci volumul cilindrului V care se spri-

jină pe I și este limitat superior de graficul S al funcției f , este dat de egalitatea

$$\text{Volum } V = \iint_I f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx$$

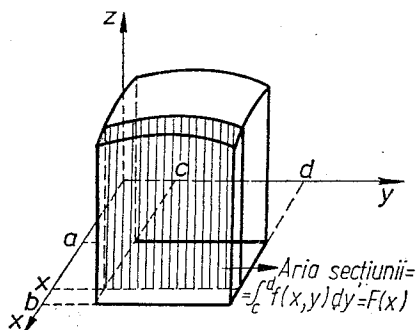


Fig. 48

Pentru orice $x \in [a, b]$ integrala $\int_c^d f(x, y) \, dy = F(x)$ este aria secțiunii făcute în cilindrul V de un plan ce trece prin punctul $(x, 0, 0)$ și este paralel cu planul yOz . Dacă ținem seama de semnificația geometrică a integralei duble, atunci $\int_a^b F(x) \, dx$ este tocmai volumul lui V .

Exemplu. Să se calculeze volumul cilindrului V care se sprijină pe $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$ și este mărginit superior de suprafața de ecuație $z = x^2 + y^2$.

Avem vol $V = \iint_I (x^2 + y^2) \, dx \, dy$. Dacă ținem seama de teorema 1.4. atunci

$$\begin{aligned} \text{vol. } V &= \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 (x^2 + y^2) \, dy = \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1 dx = \\ &= \int_{-1}^1 2 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = 2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= 2 \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Pentru a da regula de calcul a unei integrabile duble în cazul în care domeniul D nu mai este un interval este necesară noțiunea de domeniu simplu în raport cu una din axe.

Definiție. 1.4. Fie D un domeniu compact, definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

unde φ_1 și φ_2 sînt funcții continue pe $[a, b]$ și $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pentru $(\forall) x \in [a, b]$. Un astfel de domeniu se numește simplu în raport cu axa Oy .

Un domeniu D , compact, definit de inegalitatea

$$c \leq y \leq d$$

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$$

unde ψ_1 și ψ_2 sînt două funcții continue pe $[c, d]$ și $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pentru $(\forall) y \in [c, d]$ se numește simplu în raport cu axa Ox .

În fig. 49 este ilustrat un domeniu simplu în raport cu axa Oy , iar în fig. 50 este ilustrat un domeniu simplu în raport cu axa Ox .

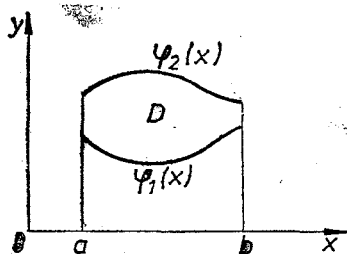


Fig. 49

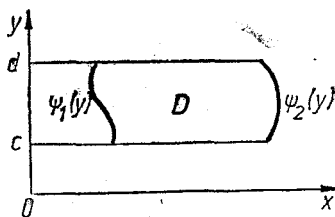


Fig. 50

Pentru un domeniu simplu în raport cu axa Oy , regula de calcul este dată de teorema care urmează.

Teorema 3.4. Fie D un domeniu compact, simplu în raport cu axa Oy definit de inegalitățile:

$$a \leq x \leq b; \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x);$$

f o funcție mărginită, definită pe D și presupunem că:

- 1) f este integrabilă pe D
- 2) pentru $(\forall) x \in [a, b]$, există integrala

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \quad (5)$$

Atunci există și integrala

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

și are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy$$

Demonstrație. Funcțiile φ_1 și φ_2 au fost presupuse continue pe intervalul compact $[a, b]$ deci sînt și mărginite pe acest interval

Fie

$$c = \inf_{x \in [a, b]} \varphi_1(x) \text{ și } d = \sup_{x \in [a, b]} \varphi_2(x)$$

Fie $I = [a, b] \times [c, d]$. Se vede imediat că $D \subset I$ și acest fapt este ilustrat în fig. 51.

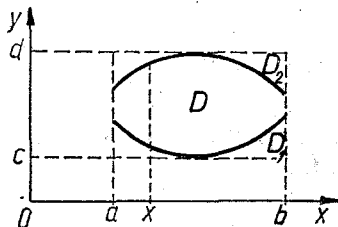


Fig. 51

Notînd cu D_1 domeniul compact definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq \varphi_1(x)$$

și cu D_2 domeniul compact definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b$$

$$\varphi_2(x) \leq y \leq d$$

Avem, evident $I = D_1 \cup D \cup D_2$

Frontiera fiecăruia dintre domeniile D_1, D, D_2 este de arie nulă, deoarece funcțiile φ_1 și φ_2 au fost presupuse continue, deci domeniile considerate au arie. Să considerăm funcția ajutătoare $\bar{f}$, definită pe I în modul următor

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dacă } (x, y) \in I - D \end{cases}$$

Eventualele puncte de discontinuitate pe care funcția $\bar{f}$ le poate avea în plus față de funcția f , sînt situate în orice caz pe una din frontierele domeniilor D_1, D, D_2 . Funcția f a fost presupusă integrabilă pe D și deci mulțimea punctelor sale de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă. Putem spune deci că mulțimea punctelor de discontinuitate ale funcției $\bar{f}$, este de măsură Lebesgue nulă, și deci $\bar{f}$ este integrabilă pe I .

Folosind acum proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcție de domeniu, obținem

$$\iint_I \bar{f}(x, y) dx dy = \iint_{D_1} \bar{f}(x, y) dx dy + \iint_D \bar{f}(x, y) dx dy + \iint_{D_2} \bar{f}(x, y) dx dy$$

Din modul cum a fost definită funcția $\bar{f}$ rezultă imediat că

$$\iint_{D_1} \bar{f}(x, y) dx dy = \iint_{D_2} \bar{f}(x, y) dx dy = 0$$

și în plus avem

$$\iint_D \bar{f}(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Deci are loc egalitatea

$$\iint_I \bar{f}(x, y) \, dx \, dy = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy \quad (6)$$

Funcției $\bar{f}$ îi vom aplica rezultatul stabilit în teorema 1.4. Pentru aceasta trebuie observat că integrala

$$\int_c^d \bar{f}(x, y) \, dy$$

există, deoarece am presupus existența integralei (5) și în plus pentru fiecare $x \in [a, b]$ are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_c^d \bar{f}(x, y) \, dy &= \int_c^{\varphi_1(x)} \bar{f}(x, y) \, dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x, y) \, dy + \int_{\varphi_2(x)}^d \bar{f}(x, y) \, dy = \\ &= 0 + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy + 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Funcția $\bar{f}$ satisface deci toate condițiile din teorema 1.4 și putem scrie

$$\iint_I \bar{f}(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy$$

Dacă ținem seama de egalitățile (6) și (7) avem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) \, dy$$

adică tocmai egalitatea din enunțul teoremei.

Observația 4. Dacă domeniul compact D este simplu în raport cu axa Ox , atunci are loc următoarea

Teoremă 4.4. Fie D un domeniu compact simplu în raport cu axa Ox , definit de inegalitățile

$$c \leq y \leq d; \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y);$$

Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe D și presupunem că

- 1) f este integrabilă pe D
- 2) pentru orice $y \in [c, d]$ există integrala

$$\int_a^b f(x, y) \, dx$$

Atunci există și integrala

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \text{ și are loc egalitatea}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx$$

Observația 5. Dacă domeniul compact D are proprietatea că orice paralelă la axa Oy intersectează frontiera lui D în cel mult două puncte, așa cum este ilustrat în fig. 52 atunci rezultatul stabilit în teorema 3.4 rămîne valabil.

Un rezultat asemănător este valabil dacă orice paralelă la axa Ox intersectează frontiera lui D , în cel mult două puncte. Această situație este ilustrată în fig. 53.

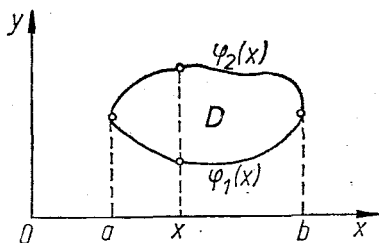


Fig. 52

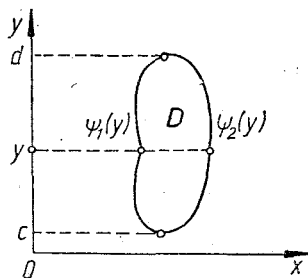


Fig. 53

Observația 6. Dacă domeniul compact D nu este în una din situațiile date la observația 5, atunci descompunem pe D prin paralele la axele de coordonate, într-un număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \dots, D_n$ cu $\bigcup_{i=1}^n D_i = D$ și fiecare $D_i (i = 1, 2, \dots, n)$ să fie în una din situațiile date mai sus.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcție de domenii avem

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy.$$

O astfel de situație este ilustrată în fig. 54.

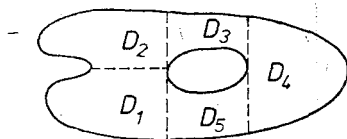


Fig. 54

Exemplu 1. Să se calculeze

$$J = \iint_D \frac{dx dy}{(x + y + 1)^2}$$

unde

$$D = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$\begin{aligned} J &= \iint_D \frac{dx dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 \left. -\frac{1}{x+y+1} \right|_0^1 dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exemplu 2. Să se calculeze $J = \iint_D x^2 y dx dy$ unde D este semicercul definit de inegalitățile $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$

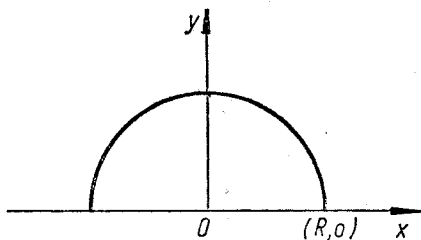


Fig. 55

Avem

$$\begin{aligned} J &= \iint_D x^2 y dx dy = \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} x^2 y dy = \\ &= \int_{-R}^R x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R x^2 (R^2 - x^2) dx = \frac{2R^5}{15} \end{aligned}$$

Exemplu 3. Să se calculeze $J = \iint_D (x+y) dx dy$ unde D este porțiunea din plan mărginită de parabola $y = x^2$ și dreapta $y = x$.

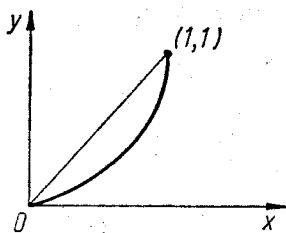


Fig. 56

În acest caz avem $\varphi_1(x) = x^2$;

$$\varphi_2(x) = x \quad \text{și} \quad x \in [0, 1]$$

Avem deci

$$\begin{aligned}
 J &= \iint_D (x+y) \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x+y) \, dy = \\
 &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{20}
 \end{aligned}$$

Exemplu 4. Să se pună limitele de integrare în cele două moduri posibile $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$, dacă D este mărginit de cercul $y = \sqrt{2ax - x^2}$ parabola $y = \sqrt{2ax}$ și dreapta $x = 2a$, $a > 0$.

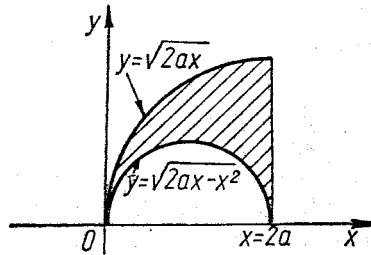


Fig. 57

Domeniul D este dat în fig. 57. Domeniul D este simplu în raport cu Oy și avem

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) \, dy$$

În raport cu axa Ox domeniul D nu mai este simplu, îl descompunem în trei subdomenii și obținem în acest fel

$$\begin{aligned}
 \iint_D f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) \, dx + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) \, dx + \\
 &\quad + \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y) \, dx
 \end{aligned}$$

Exemplu 5. Să se calculeze $I = \iint_D xy \, dx \, dy$, unde D este dat în fig. 58.

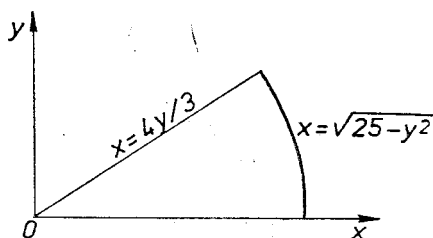


Fig. 58

În acest caz este convenabil să integrăm mai întâi în raport cu x și obținem:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^3 dy \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} xy \, dx = \frac{1}{2} \int_0^3 yx^2 \Big|_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^3 y \left(25 - y^2 - \frac{16y^2}{9} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^3 \left(25y - \frac{25y^3}{9} \right) dy = \frac{225}{8} \end{aligned}$$

§ 5. FORMULA LUI RIEMANN-GREEN

În anumite condiții există legătură între integrala curbilinie și integrala dublă. Pentru a stabili această legătură introducem noțiunea de frontieră orientată a unui domeniu compact.

Definiție 1.5. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$, un domeniu compact avînd frontiera formată dintr-o curbă netedă sau reuniune finită de curbe netede. Sensul dat pe Γ de un observator care prin deplasare pe această curbă lasă la stînga domeniul D se numește sensul direct sau pozitiv de parcurgere a lui Γ . Curbă Γ împreună cu sensul direct de parcurgere se numește curbă orientată direct sau pozitiv și se notează cu Γ_+ . În mod asemănător se introduce și Γ_- .

În fig. 59 este ilustrat un exemplu un domeniu compact simplu conex cu frontiera orientată direct.

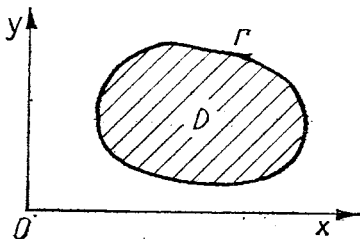


Fig. 59

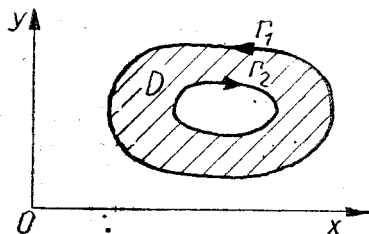


Fig. 60

În fig. 60 este ilustrat un exemplu de domeniu compact cu frontiera formată din două curbe netede și orientată direct. Un astfel de domeniu cu „gaură” se numește domeniu dublu conex. În ambele cazuri domeniul D este hașurat.

Noțiunea de frontieră orientată se menține și în cazul în care $\text{Fr} \cdot D$ este o curbă netedă pe porțiuni sau reuniuni de astfel de curbe. Pentru a pune în evidență faptul că o integrală curbilinie este considerată pe o curbă închisă orientată pozitiv se folosește notația $\oint$.

Pentru a stabili formula lui Riemann-Green, pentru un domeniu compact oarecare, vom demonstra două teoreme ajutătoare, valabile în cazul domeniilor simple în raport cu una din axe.

Teorema 1.5. Fie P o funcție reală definită și continuă pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$, simplu în raport cu axa Oy . Dacă derivata $\frac{\partial P}{\partial y}$ există și este continuă pe D , atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy; \quad \text{Fr} \cdot D = \Gamma \quad (1)$$

Demonstrație. Existența celor două integrale este garantată de continuitatea funcțiilor de sub semnul integrală și de ipoteză făcută asupra lui D . Domeniul D are forma din fig. 61 unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ și Γ este orientată direct.

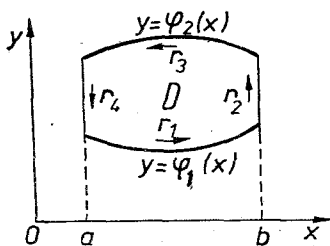


Fig. 61

Funcțiile φ_1 și φ_2 sînt continue pe $[a, b]$. Calculăm integrala dublă din membrul drept al egalității (1) și arătăm că ea este egală cu integrala curbilinie din membrul stîng.

Avem

$$\begin{aligned} \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y} dy = \int_a^b -P(x, y) \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = \\ &= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))] dx \end{aligned} \quad (2)$$

Pe de altă parte avem

$$\begin{aligned} \oint P(x, y) dx &= \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx + \int_{\Gamma_2} P(x, y) dx + \\ &+ \int_{\Gamma_3} P(x, y) dx + \int_{\Gamma_4} P(x, y) dx \end{aligned}$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este indicat în figură.

Integralele pe Γ_2 și Γ_4 sînt nule, deoarece aici x este constant; în cazul lui Γ_2 avem $x = b$, iar în cazul lui Γ_4 avem $x = a$.

Pentru Γ_1 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= t, & t \in [a, b]; \text{ deci} \\ y &= \varphi_1(t) \\ \int_{\Gamma_1} P(x, y) dx &= \int_a^b P(t, \varphi_1(t)) dt. \end{aligned}$$

Pentru Γ_3 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= t, & t \in [a, b] \text{ deci} \\ y &= \varphi_2(t) \\ \int_{\Gamma_3} P(x, y) dx &= \int_b^a P(t, \varphi_2(t)) dt = - \int_a^b P(t, \varphi_2(t)) dt \end{aligned}$$

Prin urmare

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx = \int_a^b [P(t, \varphi_1(t)) - P(t, \varphi_2(t))] dt \quad (3)$$

Din relațiile (2) și (3) rezultă imediat că

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx = \iint_D - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Teorema 2.5. Fie Q o funcție reală definită și continuă pe un domeniu compact, $D \subset \mathbb{R}^2$ simplu în raport cu axa Ox . Dacă derivata $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există și este continuă pe D , atunci

$$\oint_{\Gamma} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy; \quad \Gamma = \text{Fr} \cdot D \quad (4)$$

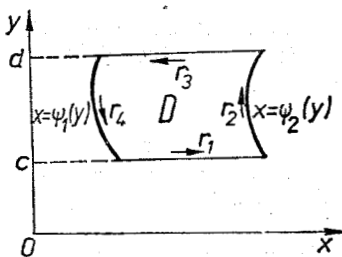


Fig. 62

Demonstrație. Domeniul D are forma din fig. 62 unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Procedînd ca și în cazul teoremei 1.5. obținem

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_c^d Q(x, y) \Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy = \\ &= \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)] dy \end{aligned} \quad (5)$$

Pe de altă parte avem:

$$\oint_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_{\Gamma_1} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_2} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_3} Q(x, y) dy + \int_{\Gamma_4} Q(x, y) dy$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este cel indicat în figură. Dar integralele pe Γ_1 și Γ_3 sînt nule deoarece aici y este constant. Pentru Γ_2 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= \psi_2(t), & t \in [c, d] \\ y &= t \end{aligned}$$

și deci

$$\int_{\Gamma_2} Q(x, y) dy = \int_c^d Q(\psi_2(t), t) dt$$

Pentru Γ_4 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= \psi_1(t), & t \in [c, d] \text{ și deci} \\ y &= t \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_4} Q(x, y) dy = \int_d^c Q(\psi_1(t), t) dt = - \int_c^d Q(\psi_1(t), t) dt$$

Deci

$$\oint_{\Gamma} Q(x, y) dy = \int_c^d [Q(\psi_2(t), t) - Q(\psi_1(t), t)] dt \quad (6)$$

Din relațiile (5) și (6) rezultă imediat că

$$\oint_{\Gamma} Q(x, y) dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

Pentru a demonstra formula lui Riemann-Green este necesară următoarea

Observație. Presupunem că domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$ este o reuniune finită de domenii compacte D_i , $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$ și că aceste domenii nu au puncte interioare comune iar $\Gamma_i = \text{Fr} \cdot D_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) este o curbă netedă pe porțiuni. În fig. 63 este ilustrată o astfel de situație.

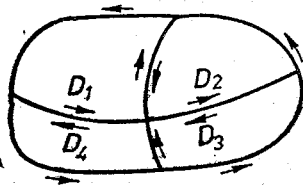


Fig. 63

În aceste condiții, dacă P și Q sînt două funcții reale definite și continue pe D , are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} P dx + Q dy$$

Egalitatea se demonstrează imediat dacă ținem seama de aditivitatea integralei curbilini relative la juxtapunerea de curbe și de egalitatea

$$\int_{\Gamma_+} P dx + Q dy = - \int_{\Gamma_-} P dx + Q dy$$

Formula lui Riemann-Green. Fie P și Q două funcții reale definite și continue pe domeniul compact $D \subset \mathbb{R}^2$. Dacă derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial y}$ și $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există și sînt continue pe D , atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\Gamma = \text{Fr} \cdot D \quad (7)$$

Demonstrație. Prin paralele la axa Oy putem descompune domeniul D într-o reuniune finită de domenii simple în raport cu axa Oy ; $D = \bigcup_{i=1}^n D_i$.

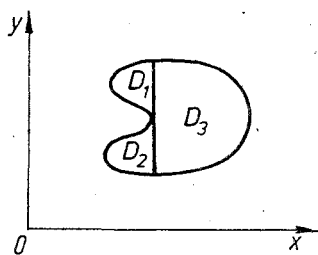


Fig. 64

O astfel de situație este ilustrată în fig. 64. Folosind proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcție de domeniu, obținem

$$\iint_D - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Aplicînd pentru fiecare D_i , rezultatul stabilit în teorema 1.5, obținem

$$\iint_{D_i} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma_i} P(x, y) dx, \quad \Gamma_i = \text{Fr} \cdot D_i$$

Prin urmare avem

$$\iint_D - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} P(x, y) dx$$

Observația precedentă ne permite să scriem egalitatea

$$\sum_{i=1}^n \oint_{\Gamma_i} P(x, y) dx = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx$$

și deci avem

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_{\Gamma} P(x, y) dx \quad (8)$$

Procedînd similar cu $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$, obținem

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y) dy \quad (9)$$

Prin sumarea relațiilor (8) și (9) obținem

$$\oint_{\Gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

adică tocmai egalitatea (7), dată în enunț.

Consecință. Dacă $\Gamma = \text{Fr} \cdot D$ este netedă pe porțiuni atunci D are arie și avem egalitatea

$$\text{aria } D = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx$$

Dacă luăm $P(x, y) = -\frac{y}{2}$ și $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ și aplicăm formula Riemann Green avem

$$\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx = \iint_D dx dy$$

Prin urmare obținem formula ariei lui D cu ajutorul integralei curbilinii

$$\text{aria } D = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx$$

Exemplu 1. Să se calculeze aria lui

$$D = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Frontiera lui D este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pentru care avem reprezentarea parametrică

$$\begin{aligned} x &= a \cos \theta \\ y &= b \sin \theta \end{aligned} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

Aplicînd formula de mai sus, avem

$$\begin{aligned} \text{aria } D &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [ab \cos^2 \theta - b \sin \theta (-a \sin \theta)] \, d\theta = \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab. \end{aligned}$$

În aplicații formula lui Riemann-Green se folosește în general pentru a transforma o integrală curbilinie pe o curbă închisă, într-o integrală dublă.

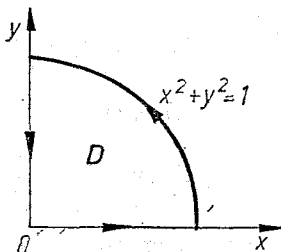


Fig. 65

Exemplu 2. Să se calculeze $\oint_{\Gamma} -xy^2 \, dx + x^2y \, dy$ unde $I(\Gamma)$ este ilustrată în fig. 65. În acest caz $P(x, y) = -xy^2$ și $Q(x, y) = x^2y$, deci

$$\begin{aligned} \oint -xy^2 \, dx + x^2y \, dy &= \iint_D (2xy - (-2xy)) \, dx \, dy = 4 \iint_D xy \, dx \, dy = \\ &= 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy = 4 \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \int_0^1 x(1-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

§ 6. SCHIMBAREA DE VARIABLE LA INTEGRALA DUBLĂ

Fie D' un domeniu compact, în planul uOv , avînd frontiera Γ' o curbă simplă, închisă și netedă pe porțiuni. Dacă

$$T \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D' \quad (1)$$

este o transformare regulată de la planul uOv la planul xOy , atunci $D = T(D')$ este un domeniu compact din planul xOy iar curba $\Gamma = T(\Gamma')$ este o curbă simplă închisă, netedă pe porțiuni și în plus $\text{Fr} \cdot D = \Gamma$.

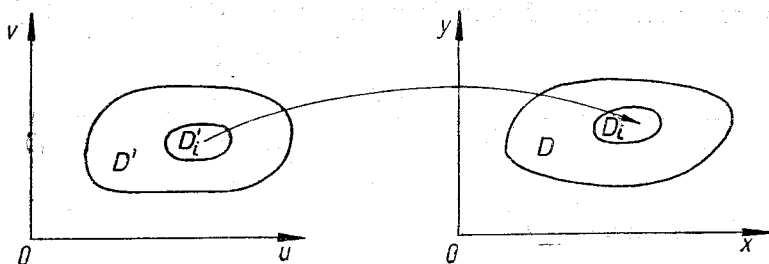


Fig. 66

În aceste condiții spunem că transformarea T este directă, dacă un punct care se deplasează în sens direct pe curba Γ' este transformat prin T , într-un punct care se deplasează pe Γ , tot în sens direct. Dacă un punct care se deplasează pe Γ' în sens direct este transformat prin T , într-un punct care se deplasează pe Γ în sens invers, atunci spunem că transformarea regulată T este inversă. În legătură cu transformările regulate care duc un domeniu D' din planul uOv într-un domeniu D din planul xOy avem următoarea

Teoremă 1.6. Dacă jacobianul transformării regulate (1) este pozitiv pe D' , $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} > 0$; $(\forall) (u, v) \in D'$, atunci transformarea (1) este directă.

Demonstrație. Pentru a demonstra acest fapt, presupunem în plus că funcțiile φ și ψ admit derivate parțiale mixte de ordinul doi continue pe D' . Știm că

$$\text{aria } D = \oint_{\Gamma} x \, dy$$

Dar fiecare punct de pe curba Γ este imaginea unui punct de pe curba Γ' , prin transformarea (1) și deci avem

$$\text{aria } D = \oint_{\Gamma} x \, dy = \oint_{\Gamma'} \varphi(u, v) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv \right) \quad (2)$$

urmînd ca sensul pe curba Γ' să fie precizat mai departe. Ultimei integrale îi aplicăm formula lui Riemann-Green

$$\oint_{\Gamma'} P(u, v) \, du + Q(u, v) \, dv = \pm \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du \, dv$$

unde semnul $+$ corespunde sensului direct pe Γ' iar semnul $-$ corespunde sensului invers pe Γ' .

În cazul nostru avem

$$P(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial u}; \quad Q(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

și deci

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial v \partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$$

În baza criteriului lui Schwarz derivatele mixte sînt egale și deci

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

Obținem deci egalitatea

$$\text{aria } D = \pm \iint_D \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} du dv$$

Dar aria $D > 0$; prin urmare în fața ultimei integrale trebuie luat semnul $+$, adică în egalitatea (2) pe Γ' trebuie luat sensul direct. În mod asemănător se arată că dacă $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} < 0$ atunci în egalitatea (2) trebuie luat sensul invers pe curba Γ' .

Observație. Din demonstrația dată, rezultă că putem scrie egalitatea

$$\text{aria } D = \iint_{D'} \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv$$

indiferent dacă transformarea regulată T este directă sau inversă. Aplicînd formula de medie pentru integrala dublă (funcția de sub semnul integrală este continuă) rezultă existența unui punct $(u_0, v_0) \in D'$ astfel încît

$$\text{aria } D = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} \cdot \text{aria } D'. \quad (3)$$

Această egalitate are un analog remarcabil în cazul domeniilor unidimensionale. Fie f o funcție reală definită pe un interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, derivabilă pe acest interval și cu $f' \neq 0$. Dacă intervalul (a, b) este imaginea prin f a intervalului (α, β) , atunci pe baza formulei de medie a lui Lagrange avem lungimea $(a, b) = |f'(\xi)| \cdot \text{lungimea } (\alpha, \beta)$, unde $\xi \in (\alpha, \beta)$. Această ultimă egalitate este analogul unidimensional al egalității (3).

Teoremă 2.6. Fie în planul uOv un domeniu compact D' avînd frontiera o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni și

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v), \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in D'$$

o transformare regulată de la planul uOv la planul xOy . Dacă punem $D = T(D')$ și $\Gamma = T(\Gamma')$ și dacă f este o funcție reală definită și continuă pe D , atunci are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du dv \quad (4)$$

numită formula schimbării de variabile la integrala dublă sau formula de transport.

Demonstrație. Domeniile D și D' au arie deoarece frontierele lor sînt curbe netede pe porțiuni. Din continuitatea funcțiilor f , φ , ψ și din faptul că transformarea T a fost presupusă regulată, rezultă continuitatea funcțiilor care apar sub cele două integrale. Aceste două observații garantează existența integralelor din egalitatea (4). Fie acum $\Delta' = (D'_1, D'_2, \dots, D'_n)$ o diviziune oarecare a lui D' . Prin transformarea regulată T fiecărui domeniu D'_i îi corespunde un domeniu $D_i \subset D$. Obținem în acest fel o diviziune $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ a lui D .

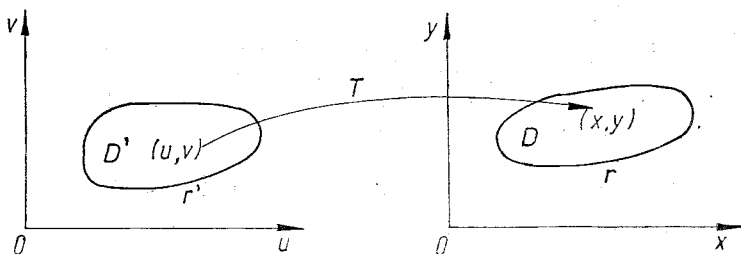


Fig. 67

Pentru fiecare domeniu D_i aplicăm formula (3). Rezultă în acest fel că pentru fiecare i ($i = 1, 2, \dots, n$) există un punct $(u_i, v_i) \in D'_i$ astfel încît: $\text{aria } D_i = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_i, v_i)} \cdot \text{aria } D'_i$. Să punem $\xi_i = \varphi(u_i, v_i)$, $\eta_i = \psi(u_i, v_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) și avem $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Putem deci forma suma Riemann

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i$$

Dacă ținem seama de relațiile stabilite mai sus, obținem

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_i, v_i)} \cdot \text{aria } D'_i$$

Considerăm funcția

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|$$

și deci avem

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^n F(u_i, v_i) \cdot \text{aria } D'_i = \sigma_{\Delta'}(F, u_i, v_i) \quad (5)$$

Rezultă în acest fel că orice sumă Riemann relativ la funcția F și la diviziunea Δ' a lui D' este egală cu o sumă Riemann relativ la funcția f și diviziunea Δ a lui D .

Fie (Δ'_k) un șir de diviziuni ale lui D' , cu $v(\Delta'_k) \rightarrow 0$. Din continuitatea lui T pe D' (compact) rezultă că T este uniform continuă și deci din condiția $v(\Delta'_k) \rightarrow 0$ rezultă că și $v(\Delta_k) \rightarrow 0$; unde Δ_k este diviziunea lui D corespunzătoare diviziunii Δ'_k a lui D' .

Egalitatea (5) este adevărată pentru fiecare k ; deci

$$\sigma_{\Delta_k}(f, \xi_i, \eta_i) = \sigma_{\Delta'_k}(F, u_i, v_i)$$

Din existența celor două integrale și prin trecerea la limită în ultima relație obținem formula dată în enunțul teoremei.

Observații și exemple

1) Condiția ca jacobianul transformării T să fie diferit de zero este suficient să fie îndeplinită în interiorul lui D' .

2) Din punct de vedere al aplicațiilor, găsirea lui T constituie problema esențială. Pentru rezolvarea acestei probleme nu există o metodă generală. Găsirea transformării T este dictată în general de ecuațiile curbelor care formează frontiera lui D .

Exemplu 1. Să se calculeze aria domeniului D , mărginit de curbele

$$\begin{aligned} xy = a & & xy = b & & b > a > 0 \\ y = \alpha x & & y = \beta x & & \beta > \alpha > 0 \end{aligned}$$

și situat în primul cadru.

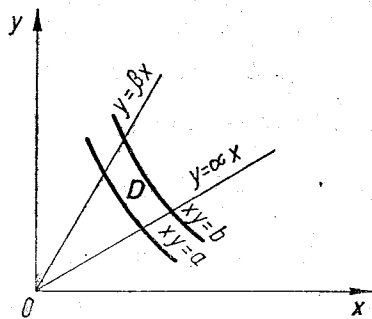


Fig. 68

Domeniul D este dat în fig. 68. Considerăm transformarea

$$T: \begin{cases} u = xy, & u \in [a, b] \\ v = \frac{y}{x}, & v \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

Cu această ultimă transformare intervalul $D' = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ se transformă în domeniul D din fig. 68.

Avem

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y - \frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ x & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2 \frac{y}{x}} = \frac{1}{2v}$$

și deci aria căutată va fi

$$\text{aria } D = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D'} \frac{du dv}{v} = \frac{1}{2} \int_a^b du \int_\alpha^\beta \frac{dv}{v} = \frac{b-a}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

Exemplu 2. Schimbarea de variabile în coordonate polare este una dintre schimbările de variabile cel mai des utilizate și este definită de:

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta & \rho \in [0, R] \\ y = \rho \sin \theta & \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

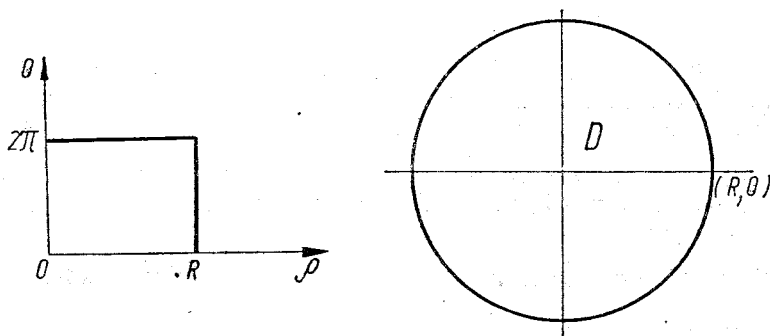


Fig. 69

În fig. 69 sînt ilustrate domeniile D' și $D = T(D')$

$$\text{În acest caz } \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho$$

Se vede că jacobianul se anulează pe axa $O\theta$ din planul $\rho O\theta$, lucru permis conform observației precedente.

Să se calculeze

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)^2 dx dy; \text{ unde } D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Aplicînd schimbarea de variabile în coordonate polare obținem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^4 \cdot \rho d\rho = 2\pi \frac{R^6}{6} = \frac{\pi R^6}{3}.$$

§ 7. INTEGRALE DUBLE IMPROPRII

Am definit integrala dublă $\iint_D f(x, y) dx dy$ a unei funcții reale f , definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$.

Vom extinde această definiție mai întâi pentru cazul în care D nu mai este mărginit. Amintim că un domeniu plan D se numește nemărginit dacă el conține puncte exterioare oricărui cerc cu centrul în originea axelor de coordonate.

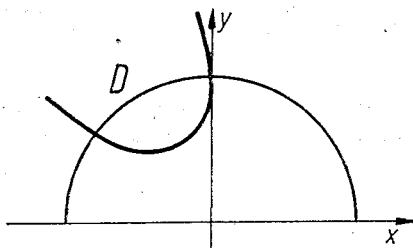


Fig. 70

În fig. 70 este ilustrat un exemplu de domeniu plan nemărginit. Vom presupune în continuare că orice parte mărginită a frontierei lui D este o curbă netedă sau netedă pe porțiuni.

Definiție 1.7. Fie D o mulțime nemărginită din plan. Spunem că D admite o exhaustiune dacă există un șir (D_n) de mulțimi din plan, compacte care au arie astfel încât:

1) Șirul (D_n) este ascendent față de operația de incluziune, adică $D_n \subset D_{n+1}$ și $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

2) Orice mulțime compactă inclusă în D este conținută într-un D_n .

Dacă D este un domeniu plan nemărginit, atunci putem realiza o exhaustiune a lui D în felul următor:

Considerăm un șir de numere reale pozitive (R_n) , strict crescător cu $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \infty$ și fie

$$K_n = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R_n^2\}$$

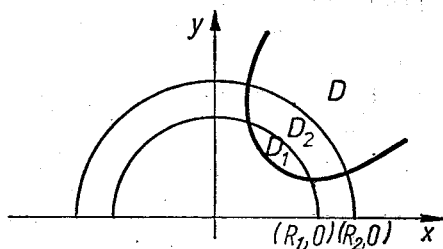


Fig. 71

Dacă luăm $D_n = D \cap K_n$, atunci este evident că șirul de mulțimi (D_n) este o exhaustiune a lui D . În fig. 71 este ilustrată o exhaustiune a lui D pentru un șir (R_n) dat.

Definiție 2.7. Fie f o funcție reală definită pe un domeniu nemărginit $D \subset \mathbf{R}^2$ și integrabilă pe orice subdomeniu compact care are arie, a lui D . Spunem că f este integrabilă impropriu pe D , dacă există un număr I , astfel încât pentru orice exhaustiune (D_n) a lui D să avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = I \text{ și vom scrie}$$

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = I$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este convergența pe D .

Exemplu. Fie $f(x, y) = xy : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$. Deci în acest caz $D = \mathbf{R}^2$ și să luăm

$$D_n = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Se vede că (D_n) este o exhaustiune a lui $\mathbf{R}^2$ și trecînd la coordonate polare obținem

$$\iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \rho^3 \sin \theta \cos \theta \, d\rho = 0,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = 0$$

Pe de altă parte dacă luăm $D'_n = [-n, 2n] \times [-n, 2n]$ se vede imediat că (D'_n) este o exhaustiune a lui $\mathbf{R}^2$ și

$$\iint_{D'_n} f(x, y) \, dx \, dy = \int_{-n}^{2n} x \, dx \cdot \int_{-n}^{2n} y \, dy = \left(\frac{3n^2}{2}\right)^2,$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D'_n} f(x, y) \, dx \, dy = \infty.$$

Dacă ținem seama de definiția dată rezultă că funcția $f(x, y) = xy$ nu este integrabilă impropriu pe $\mathbf{R}^2$.

În legătură cu integrabilitatea funcțiilor pozitive pe un domeniu nemărginit are loc

Teorema 1.7. Fie f o funcție pozitivă definită pe un domeniu nemărginit $D \subset \mathbf{R}^2$ și integrabilă pe orice subdomeniu compact care are aria lui D , atunci f este integrabilă impropriu pe D , dacă și numai dacă există o exhaustiune (D_n) a lui D astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = I$$

există și este finită. În plus are loc egalitatea

$$I = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

Demonstrație. Necesitatea condiției este evidentă. Pentru a demonstra suficiența condiției fie (D_n) o exhaustiune a lui D pentru care

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x, y) \, dx \, dy = I$$

există și este finită. Fie (D'_n) o altă exhaustiune a lui D . Mulțimile D'_n ($n \in \mathbb{N}$) sînt mulțimi compacte și din definiția exhaustiunii (D_n) rezultă că există un indice $k(n)$ astfel încît

$$D'_n \subset D_{k(n)}.$$

Din faptul că f a fost presupusă pozitivă pe D , rezultă

$$\iint_{D'_n} f(x, y) \, dx \, dy \leq \iint_{D_{k(n)}} f(x, y) \, dx \, dy \leq I$$

Tot din faptul că $f \geq 0$ pe D rezultă că șirul $\left(\iint_{D'_n} f(x, y) \, dx \, dy \right)$ este monoton crescător, el este mărginit superior de I , prin urmare există și este finită limita următoare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D'_n} f(x, y) \, dx \, dy = I'$$

Între cele două limite are loc inegalitatea $I' \leq I$. Dacă schimbăm rolul celor două exhaustiuni obținem că $I \leq I'$ și deci $I' = I$. Cum exhaustiunea (D'_n) a fost luată arbitrar, deducem că f este integrabilă impropriu pe D și că are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = I$$

Exemplu. Fie $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Aici $D = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Vom arăta că f este integrabilă impropriu pe D . Deoarece f este pozitivă pe $\mathbb{R}_+^2$ este suficient să considerăm o exhaustiune particulară a lui D .

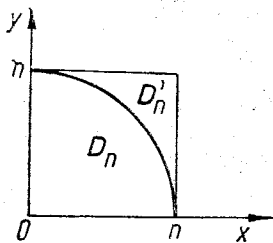


Fig. 72

Luăm

$$D_n = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq n^2; x \geq 0, y \geq 0\}$$

și atunci

$$I = \iint_{R_2^+} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate polare obținem

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n \rho e^{-\rho^2} d\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \left(\frac{-1}{2} e^{-\rho^2} \right) \Big|_0^n = \\ &= \frac{\pi}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Dacă considerăm exhaustiunea $D'_n = [0, n] \times [0, n]$, atunci

$$\begin{aligned} \iint_{R_2^+} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n dx \int_0^n e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^n e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de teorema 1.7, din confruntarea celor două rezultate deducem

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

În fig. 72 sînt ilustrate cele două domenii D_n și D'_n .

Acest procedeu de calcul extrem de simplu aparține lui Poisson.

În continuare vom da unele rezultate în legătură cu integralele duble improprii, fără însă a da demonstrațiilor lor.

Teorema 2.7. O condiție necesară și suficientă pentru ca o funcție f să fie integrabilă impropriu pe un domeniu D nemărginit este ca funcția $|f|$ să fie integrabilă impropriu pe D .

Demonstrația acestei teoreme se găsește în [24] sau [25].

După cum se vede din această teoremă găsim o neconcordanță între integrala pe domenii nemărginite din $\mathbf{R}^2$ și integrala pe domenii nemărginite de pe dreapta reală. Această neconcordanță se datorește varietății formelor domeniilor plane față de structura foarte simplă a unui domeniu al dreptei reale (pe $\mathbf{R}$ orice domeniu este un interval). Unele rezultate stabilite pentru integralele improprii pe domenii nemărginite ale funcțiilor de o variabilă pot fi refăcute și în cazul integralelor duble improprii pe domenii nemărginite. Se demonstrează cu ușurință, dacă ținem seama de teorema 2.7 următorul criteriu de comparație dat în

Teorema 3.7. Fie f și g două funcții reale definite pe un același domeniu nemărginit $D \subset \mathbb{R}^2$, integrabile pe orice subdomeniu compact, cu arie, a lui D . Dacă

1) g este integrabilă impropriu pe D

2) $|f(x, y)| \leq |g(x, y)|; (\forall) (x, y) \in D$

atunci f este integrabilă impropriu pe D .

Aplicație. În condițiile teoremei 3.7 dacă

$$g(x, y) = \frac{M}{(x^2 + y^2 + a^2)^\alpha}, \alpha > 1, M > 0$$

atunci f este integrabilă. Este suficient să demonstrăm că g este integrabilă impropriu pe D .

Fie

$$K_n = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq n^2\}; n \in \mathbb{N} \text{ și } D_n = D \cap K_n$$

Este evident că (D_n) este o exhaustiune a lui D și că

$$\iint_{D_n} g(x, y) dx dy \leq \iint_{K_n} g(x, y) dx dy$$

Trecînd la coordonate polare obținem

$$\begin{aligned} \iint_{K_n} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^\alpha} &= M \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 + a^2)^\alpha} = \\ &= \frac{M\pi}{1 - \alpha} \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{\alpha-1}} \Big|_0^n = \frac{\pi M}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{a^{2(\alpha-1)}} - \frac{1}{(a^2 + n^2)^{\alpha-1}} \right] \leq \\ &\leq \frac{\pi M}{(\alpha - 1) a^{2(\alpha-1)}}. \end{aligned}$$

Funcția g fiind pozitivă rezultă că șirul $\left(\iint_{D_n} g(x, y) dx dy \right)$ este crescător, am arătat că este mărginit superior, deci este convergent. Prin urmare funcția g este integrabilă impropriu pe D , în cazul $\alpha > 1$.

Teorema 4.7. Să presupunem că funcțiile f și g sînt absolut integrabile pe intervalul $(-\infty, +\infty)$. Atunci funcția $f \cdot g$ este integrabilă pe $\mathbb{R}^2$ și are loc egalitatea

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy$$

Folosind această teoremă putem stabili formula lui Jacobi care dă legătura între funcțiile B și Γ ale lui Euler.

Fie p și q două numere pozitive. Avem

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} y^{p-1} e^{-y} dy \text{ și}$$

$$\Gamma(q) = \int_0^{\infty} x^{q-1} e^{-x} dx$$

Din ultima teoremă rezultă că

$$\Gamma(p) \cdot \Gamma(q) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-(x+y)} x^{q-1} y^{p-1} dx dy$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$$

atunci domeniul $D' = [0, \infty) \times [0, 1]$ se transformă în $\mathbb{R}_+^2$.

Jacobianul transformării va fi

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & v \\ -u & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u$$

și deci

$$\begin{aligned} \Gamma(p) \Gamma(q) &= \int_0^1 dv \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} du = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{p+q-1} du \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv = \Gamma(p+q) B(p, q) \end{aligned}$$

Prin urmare

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \cdot \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

Vom considera acum cazul în care funcția reală f este definită pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ cu excepția unui punct $M_0(x_0, y_0) \in D$ și în orice vecinătate V a lui M_0 funcția f este nemărginită.

În continuare vom presupune că D și V au arie și că f este integrabilă pe $D - V$. În fig. 73 porțiunile hașurate ilustrează pe $D - V$.

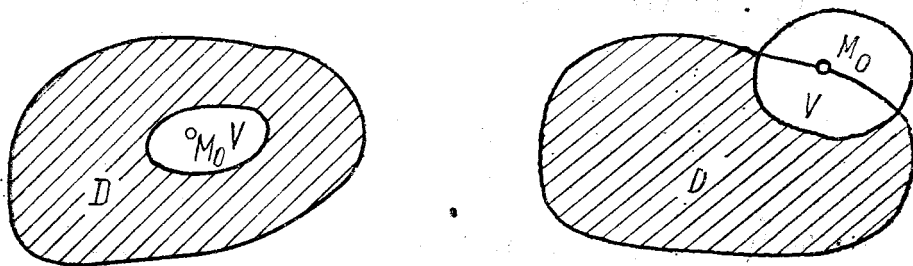


Fig. 73

Notăm cu $d(V)$ diametrul lui V și fie (V_n) un șir de vecinătăți ale lui M_0 cu $V_n \supset V_{n+1}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} d(V_n) = 0$.

În aceste condiții putem da următoarea

Definiție 3.7. Spunem că f este integrabilă impropriu pe D dacă există un număr I , astfel încât pentru orice șir de vecinătăți (V_n) ale lui M_0 cu $\lim_{n \rightarrow \infty} d(V_n) = 0$ să avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D-V_n} f(x, y) \, dx \, dy = I$$

și vom scrie

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = I$$

Despre integrala din membrul stâng spunem că este convergentă. Rezultate asemănătoare celor de la integrala dublă pe domenii nemărginite pot fi stabilite și în acest caz.

Ne rezumăm doar la un exemplu.

Să se afle valorile lui $\alpha > 0$ pentru care integrala

$$\iint_D \frac{dx \, dy}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^\alpha};$$

unde

$$D = \{(x, y); (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq R^2\};$$

este convergentă.

În acest caz $M_0 = (x_0, y_0)$. Considerăm

$$V_n = \left\{ (x, y); (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \frac{1}{n^2} \right\}$$

și atunci

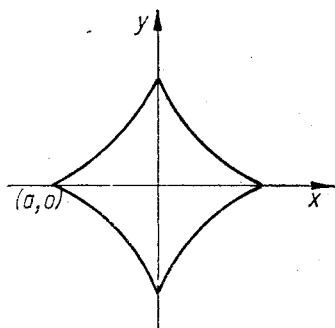
$$\begin{aligned} \iint_{D-V_n} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{n}}^R \frac{\rho \, d\rho}{\rho^{2\alpha}} = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^R \rho^{1-2\alpha} \, d\rho = \\ &= 2\pi \frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha} \Big|_{\frac{1}{n}}^R = \frac{\pi}{1-\alpha} \cdot \left[R^{2-2\alpha} - \frac{1}{n^{2(1-\alpha)}} \right] \end{aligned}$$

Deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D-V_n} f(x, y) \, dx \, dy$ există (pentru $\alpha > 0$) dacă și numai dacă $\alpha \in (0, 1)$. Pentru $\alpha \leq 0$ integrala considerată nu mai este impropriu.

§ 8. APLICAȚII ALE INTEGRALEI DUBLE.

I. *Calculul ariilor.* Dacă $D \subset \mathbb{R}^2$ este un domeniu compact și $\text{Fr} \cdot D$ o curbă netedă pe porțiuni, atunci

$$\text{aria } D = \iint_D dx dy$$



Eig. 74

Exemplu. Să se calculeze aria lui $D = \{(x, y); x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\}$. Frontiera lui D este în acest caz astroida. Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate polare generalizate

$$x = \rho \cos^3 \theta, \quad \rho \in [0, a]$$

$$y = \rho \sin^3 \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = 3\rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

Deci aria lui D este

$$\text{aria } D = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a 3\rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\rho = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{3\pi a^2}{8}$$

II. Coordonatele centrului de greutate a unei plăci plane

Fie D o placă materială (de grosime neglijabilă) situată în planul xOy . Dacă

$$\rho : D \rightarrow \mathbb{R}_+$$

este funcția densitate a plăcii și ρ este presupusă continuă atunci masa plăcii D este dată de formula

$$\text{masa } D = \iint_D \rho(x, y) dx dy$$

Coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) ale plăcii D sînt date de formulele

$$x_G = \frac{1}{\text{masa } D} \iint_D x \rho(x, y) dx dy;$$

$$y_G = \frac{1}{\text{masa } D} \iint_D y \rho(x, y) dx dy;$$

Dacă $\rho = \text{constant}$ (placa omogenă) atunci

$$x_G = \frac{\iint_D x dx dy}{\text{aria } D}; \quad y_G = \frac{\iint_D y dx dy}{\text{aria } D}$$

Exemplu. Să se afle coordonatele centrului de greutate al plăcii plane

$$D = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\}, \text{ în cazul } \rho = \text{constant}.$$

Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate polare

$$x = a \rho \cos \theta, \quad y = b \rho \sin \theta; \quad \rho \in [0, 1]; \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab \rho$$

și deci

$$\iint_D x dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 a^2 b \rho^2 \cos \theta d\rho = a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{a^2 b}{3}$$

Deci

$$x_G = \frac{4a^2 b}{3\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}.$$

$$\text{În mod asemănător obținem } y_G = \frac{4b}{3\pi}.$$

III. Momentele de inerție ale unei plăci plane

Momentul de inerție al plăcii D , față de originea axelor de coordonate, este dat de formula

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy$$

Momentele de inerție I_x și I_y ale plăcii D față de axele de coordonate Ox și Oy sînt date de formulele

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy;$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy;$$

și se vede că

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Exemplu. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele și coordonatele ale plăcii D

$$D = \{(x, y); x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

în cazul

$$\rho(x, y) = xy.$$

Avem

$$I_x = \iint_D xy^3 dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} xy^3 dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-y)^2 y^3 dy = \frac{1}{120}$$

$$I_y = \iint_D x^3 y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} x^3 y dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x)^2 x^3 dx = \frac{1}{120}$$

Folosind egalitatea $I_0 = I_x + I_y$ obținem și $I_0 = \frac{1}{60}$.

PROBLEME

Să se calculeze următoarele integrale duble:

1) $\iint_D xy dx dy$; unde D este domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ și de dreapta $y = 2x + 3$: $R: \frac{160}{3}$

2) $\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ unde: D este domeniul mărginit de dreptele $x = 0$; $y = 1$; $y = \sqrt[3]{2}$ și $y = x$; $R: \frac{1}{6} [\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2})]$

3) $\iint_D (1 - y) dx dy$ unde: $D = \{(x, y); x^2 + (y - 1)^2 \leq 1; y \leq x^2; x \geq 0\}$

$$R: \frac{1}{15}$$

$$4) \iint_D \arcsin \sqrt{x+y} \, dx \, dy, \text{ unde } D \text{ este domeniul mărginit de dreptele}$$

$$x+y=0; x+y=1; y=-1 \text{ și } y=1. \quad R: \frac{\pi}{4}$$

$$5) \iint_D \frac{dx \, dy}{6x+y+9}; \text{ unde } D \text{ este mărginit de curbele } y=x^2; y=2|x|-1$$

$$R: 3 \ln 2 - 2$$

$$6) \iint_D x^{p-1} y^{q-1} \, dx \, dy; \text{ unde } D = \{(x, y); x+y \leq 1; y \geq 0; x \geq 0\}$$

$$R: \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$$

$$7) \iint_D |\cos(x+y)| \, dx \, dy \text{ unde: } D = [0, \pi] \times [0, \pi] \quad R: 2\pi$$

Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, următoarele integrale duble

$$8) \iint_D \sqrt{(x^2+y^2)^3} \, dx \, dy; \text{ unde } D = \{(x, y); x^2+y^2 \leq a^2; y \geq 0\} \quad R: \frac{\pi a^5}{5}$$

$$9) \iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \, dx \, dy; \text{ unde } D = \{(x, y); 1 \leq x^2+y^2 \leq e^2\} \quad R: 2\pi$$

$$10) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy; \text{ unde } D = \{(x, y); ax \leq x^2+y^2 \leq 2ax; y \geq 0\}$$

$$R: \frac{14a^3}{9}$$

$$11) \iint_D \sqrt{x^2+y^2} \, dx \, dy; \text{ unde } D = \{(x, y); ax \leq x^2+y^2 \leq a^2; x \geq 0; y \geq 0\}$$

$$R: \frac{a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right)$$

$$12) \iint_D \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} \, dx \, dy; \text{ unde}$$

$$D = \{(x, y); \pi^2 \leq (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq (2\pi)^2\} \quad R: \frac{14}{3} \pi^4$$

$$13) \iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \, dx \, dy; \text{ unde } D = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

$$R: \frac{2}{3} \pi ab.$$

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Riemann-Green următoarele integrale curbilinii:

$$14) \oint_{\text{Fr}: D} e^{x^2+y^2}(-y dx + x dy); \text{ unde } D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\} \quad R: 2\pi e$$

$$15) \oint_{\text{Fr}: D} (xy - y) dx + (xy + x) dy; \text{ unde } D = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \\ R: 2\pi |a b|$$

$$16) \oint_{\text{Fr}: D} (x - y) dx + dy \text{ unde } D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 2x; y \geq 0\}$$

$$R: \frac{\pi}{2}$$

$$17) \oint_{\text{Fr}: D} \sqrt{x^2 + y^2} dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})] dy \text{ unde}$$

$$D = \{(x, y); (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1\}$$

$$R: \frac{5\pi}{4}$$

Să se calculeze ariile domeniilor mărginite de următoarele curbe:

$$18) xy = a; xy = b; x^2 = \alpha y; x^2 = \beta y; (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta)$$

$$R: \frac{1}{3} (b - a) \ln \frac{\beta}{\alpha}$$

$$19) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$$

$$R: 2a^2$$

$$20) x^4 + y^4 = x^2 + y^2$$

$$R: \pi \sqrt{2}$$

$$21) (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); x^2 + y^2 \geq a^2$$

$$R: \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2$$

$$22) \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1; \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}; 4 \frac{x}{a} = \frac{y}{b}; a > 0; b > 0$$

$$R: \frac{65}{108} ab$$

$$23) x^3 + y^3 = a xy; x \geq 0; y \geq 0;$$

$$R: \frac{a^2}{6}$$

Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene mărginite de următoarele curbe

$$24) y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4$$

$$R: x_G = \frac{2}{5}; y_G = 0$$

$$25) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1; \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1; (x \geq 0; y \geq 0)$$

$$R: x_G = \frac{10}{3(\pi - 2)}; y = \frac{2}{\pi - 2}$$

$$26) x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; x = 0; (x \geq 0); x_a = \frac{8a}{35}; y_a = 0$$

Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale plăcilor omogene mărginite de următoarele curbe:

$$27) y = x^2; x = y^2 \quad R: I_x = \frac{3}{35}; I_y = \frac{3}{35}$$

$$28) x^2 + y^2 = ay (a > 0) \quad R: I_x = \frac{5\pi a^4}{64}; I_y = \frac{\pi a^4}{64}$$

$$29) \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}; x = 0; y = 0 (a > 0) \quad R: I_x = \frac{a^4}{84}; I_y = \frac{a^4}{84}$$

Să se calculeze următoarele integrale duble improprii:

$$30) \iint_{R^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy (\alpha > 0) \quad R: \frac{2\pi\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$31) \iint_D \frac{dx dy}{x^p y^q} \text{ unde } D = \{(x, y); xy \geq 1; x \geq 1\}$$

Indicație: Se consideră exhaustiunea (D_n) unde

$$D_n = \{(x, y); 1 \leq xy \leq n; 1 \leq x \leq n\}$$

R. Integrala este convergentă pentru $p > q > 1$ și este egală cu $\frac{1}{(q-1)(p-q)}$.

$$32) \iint_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy; \text{ unde } D = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \right\} \quad R: \frac{\pi}{e} ab$$

$$33) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \text{ unde } D = \left\{ (x, y); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1; x \geq 0; y \geq 0 \right\}$$

$$R: \frac{\pi}{2} ab.$$

CAPITOLUL IX

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

§ 1. ARIA UNEI SUPRAFEȚE

Reamintim că o mulțime $E \subset \mathbb{R}^2$ se numește **domeniu** dacă E este deschisă și conexă.

Definiție 1.1. Fie f o funcție reală definită și continuă pe un domeniu $E \subset \mathbb{R}^2$. Dacă f admite derivate parțiale de ordinul întâi continue pe E , atunci mulțimea punctelor din spațiu

$$G_f = \{(x, y, z); z = f(x, y); (x, y) \in E\}$$

o numim suprafață netedă de ecuație

$$z = f(x, y); (x, y) \in E \quad (1)$$

Dacă punctul (x, y) în plan descrie o mulțime $D \subset E$ și D are arie, punctul corespunzător (x, y, z) descrie în spațiu o porțiune S , a suprafeței considerate. În continuare vom considera D un domeniu compact cu frontiera γ , o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Dacă curba γ este definită de următoarea reprezentare parametrică

$$x = \varphi(t); y = \psi(t); t \in [a, b]$$

atunci curba $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ definită de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = f(\varphi(t), \psi(t)) \end{cases}, \quad t \in [a, b]$$

se numește bordura lui S și se notează ∂S . Se vede imediat că Γ este o curbă netedă sau netedă pe porțiuni și că $\text{pr}_{xoy} I(\Gamma) = I(\gamma)$.

În fig. 75 sînt ilustrate D , $I(\gamma)$, S și $I(\Gamma)$.

În aceste condiții vom defini noțiunea de arie a lui S .

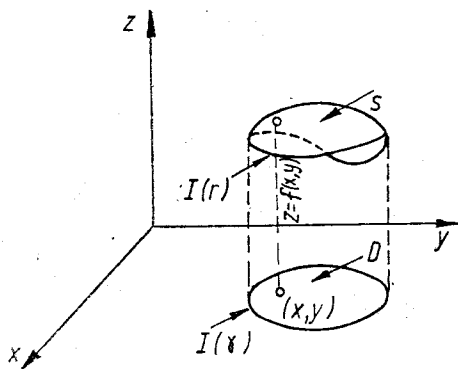


Fig. 75

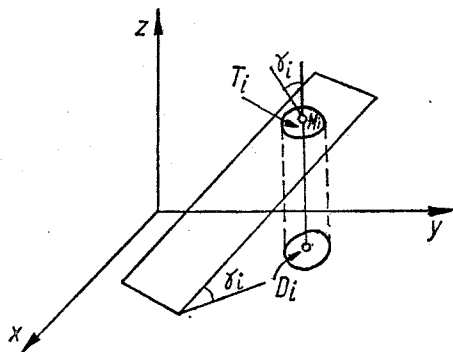


Fig. 76

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact D și (ξ_i, η_i) un punct oarecare din D_i . Fie M_i acel punct al suprafeței S ale cărui coordonate sînt ξ_i, η_i, ζ_i unde $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$.

În punctul M_i putem considera planul π_i tangent la suprafața S .

Considerăm cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_i și generatoarele paralele cu axa Oz . Acest cilindru determină pe planul tangent π_i un domeniu T_i cu proprietatea că

$$\text{Pr.}_{xOy} T_i = D_i$$

Să considerăm suma $\sum_{i=1}^n \text{aria } T_i$.

Definiție 2.1. Prin aria suprafeței netede S și o notăm aria S , înțelegem numărul dat de egalitatea

$$\text{aria } S = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{aria } T_i$$

Teorema 1.1. Dacă S este o suprafață netedă de ecuație $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ unde D este un compact cu frontieră netedă pe porțiuni atunci:

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy \text{ unde } p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \quad (2)$$

Demonstrație. Fie γ_i unghiul ascuțit format de normala la suprafața S în punctul M_i cu axa Oz . Se vede imediat că unghiul ascuțit format de planul π_i cu planul xOy este egal cu γ_i . Între aria T_i și aria D_i avem egalitatea $\text{aria } D_i = \text{aria } T_i \cos \gamma_i$.

În fig. 76 sînt ilustrate D_i , T_i și γ_i .

Dacă notăm cu p_i și q_i valorile derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}$ în punctul (ξ_i, η_i) atunci $\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}$

Deci

$$\text{aria } T_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \text{ aria } D_i$$

Să punem

$$F(x, y) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

atunci avem

$$\sum_{i=1}^n \text{aria } T_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \text{ aria } D_i = \sigma_{\Delta}(F, \xi_i, \eta_i)$$

În membrul drept al ultimei egalități avem o sumă Riemann a funcției F , relativ la diviziunea Δ și la punctele intermediare (ξ_i, η_i) . Deoarece F este continuă pe D (compunere de funcții continue), rezultă că F este integrabilă pe D și prin trecerea la limită în ultima egalitate obținem:

$$\text{aria } S = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \text{aria } T_i = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(F, \xi_i, \eta_i) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

$$\text{Deci aria } S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

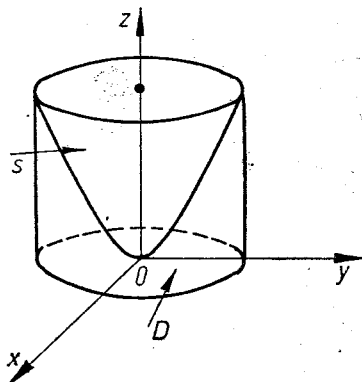


Fig. 77.

Volum

Exemplu. Să se calculeze aria suprafeței de ecuație $z = x^2 + y^2$ unde $(x, y) \in D$ iar $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$

$$\text{Avem aria } S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

Trecînd la coordonate polare obținem

$$\text{aria } S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{6} ((1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1)$$

Vom arăta ce devine formula (2) dacă facem o schimbare de variabile. Fie transformarea punctuală bijectivă

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in d \quad (3)$$

de la d pe D , unde frontiera lui d este o curbă netedă pe porțiuni.

Presupunem că funcțiile φ și ψ sînt continue împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întii și că jacobianul transformării (3); $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0$ pe d .

În aceste condiții, obținem pentru suprafața netedă S următoarele ecuații parametrice.

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \chi(u, v) \end{aligned} \quad (4)$$

În locul ecuațiilor parametrice (4) putem folosi scrierea vectorială prescurtată

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \varphi(u, v) \bar{i} + \psi(u, v) \bar{j} + \chi(u, v) \bar{k} \quad (5)$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție.

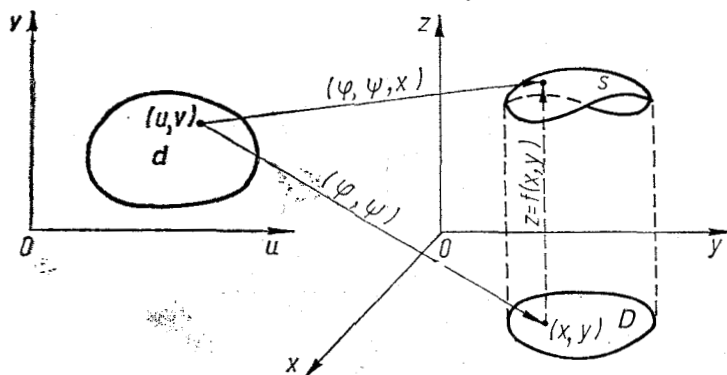


Fig. 78

Pentru a efectua schimbarea de variabile (3) în formula (2) trebuie calculate derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse în ecuația

$$z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

obținem

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{aligned} \right. \text{ sau } \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \end{aligned} \right.$$

Din ultimul sistem obținem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{D(z, y)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \text{ și } \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(x, z)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

Atunci rezultă:

$$\iint_d \sqrt{1 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2} \cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv =$$

= aria S

sau

$$\text{aria } S = \iint_d \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(x, z)}{D(u, v)} \right)^2} du dv \quad (6)$$

Formula (6) poate servi ca definiție pentru noțiunea de arie a unei suprafețe S, netedă și simplă dată parametric

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \quad (7)$$

sau sub formă vectorială

$$\vec{r} = \varphi(u, v) \vec{i} + \psi(u, v) \vec{j} + \chi(u, v) \vec{k} \quad (8)$$

Amintim că o suprafață S dată parametric prin (7) sau prin (8) se numește netedă dacă

$$\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} \right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} \right)^2 > 0 \text{ pe } D$$

Suprafața S se numește simplă dacă aplicația definită de (7)

$$(u, v) \rightarrow (x, y, z)$$

este injectivă.

Definiție 3.1. Fie S o suprafață netedă și simplă dată parametric prin (7) unde D este domeniu care are arie. Atunci prin aria S înțelegem numărul real dat de egalitatea

$$\text{aria } S = \iint_D \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

Dacă introducem notațiile

$$\begin{aligned} E &= \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u} \right)^2 \\ F &= \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ G &= \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v} \right)^2 \\ A &= \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}; \quad B = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)} \quad \text{și} \quad C = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \end{aligned}$$

atunci folosind identitatea lui Lagrange

$$\begin{aligned} (bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 &= \\ = (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 \end{aligned}$$

rezultă imediat

$$\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

și deci avem

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \, du \, dv \quad (9)$$

Definiție 4.1. Forma diferențială $d\sigma = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv$ se numește elementul de arie al suprafeței S .

În cazul unei suprafețe S de ecuație $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ dacă punem $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ obținem $E = 1 + p^2$, $G = 1 + q^2$;

$$F = p \cdot q; \quad p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

și deci elementul de arie este

$$d\sigma = \sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2) - p^2 q^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$$

Exemplu. Sfera de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ poate fi dată parametric prin:

$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi; \quad y = R \sin \theta \sin \varphi; \quad z = R \cos \theta; \\ \theta &\in [0, \pi]; \quad \varphi \in [0, 2\pi] \end{aligned}$$

și deci

$$\bar{r}(\theta, \varphi) = R \sin \theta \cos \varphi \bar{i} + R \sin \theta \sin \varphi \bar{j} + R \cos \theta \bar{k}$$

În acest caz

$$E = R^2; \quad F = 0; \quad G = R^2 \sin^2 \theta$$

și deci

$$\text{aria sferei} = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2} d\theta = 8R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 4\pi R^2$$

Teorema 2.1. Aria unei suprafețe S netede și simple nu depinde de reprezentarea sa parametrică.

Demonstrație. Fie suprafața S dată parametric de (7) și transformarea punctuală bijectivă

$$\begin{aligned} u &= \lambda(u', v'), \\ v &= \mu(u', v') \end{aligned} \quad (u', v') \in D'$$

de la D' la D , unde frontiera lui D' este o curbă netedă pe porțiuni, funcțiile λ și μ sînt continue și cu derivate parțiale continue iar $\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \neq 0$ pe D' .

Obținem în acest fel o nouă reprezentare parametrică a lui S și anume

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u', v') = \varphi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')) \\ y = \psi_1(u', v') = \psi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \\ z = \chi_1(u', v') = \chi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')) \end{cases} \quad (u', v') \in D' \quad (10)$$

Dacă notăm

$$A' = \frac{D(\psi_1, \chi_1)}{D(u', v')}; \quad B' = \frac{D(\chi_1, \varphi_1)}{D(u', v')}; \quad C' = \frac{D(\varphi_1, \psi_1)}{D(u', v')}$$

atunci se obțin cu ușurință următoarele egalități

$$A' = A \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}; \quad B' = B \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}; \quad C' = C \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \quad (11)$$

și deci

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} : \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \right|$$

Folosind formula schimbării de variabile de la integrala dublă obținem

$$\begin{aligned} \text{aria } S &= \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv = \\ &= \iint_{D'} \left(\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} : \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \right| \right) \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \right| du' dv' = \\ &= \iint_{D'} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} du' dv' \end{aligned}$$

și teorema este demonstrată.

§ 2. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE PRIMUL TIP

Fie S o suprafață netedă dată parametric

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v) \quad (7)$$

unde φ, ψ, χ , sînt funcții reale definite pe domeniul compact D din planul uOv . Presupunem că D are arie. Fie F o funcție reală definită și mărginită pe un domeniu din spațiu care conține suprafața S . Fie $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului D . Fiecărui domeniu compact D_i ($i = 1, \dots, n$) îi corespunde prin (7) o porțiune S_i din S . Alegem în fiecare domeniu D_i câte un punct oarecare (u_i, v_i) .

Punem,

$$\xi_i = \varphi(u_i, v_i), \quad \eta_i = \psi(u_i, v_i); \quad \zeta_i = \chi(u_i, v_i)$$

și formăm suma

$$\sigma_{\Delta}(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^n F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{ aria } S_i$$

Definiția 1.2. Spunem că funcția F este integrabilă pe suprafața netedă S , dacă există un număr I cu proprietatea că

$$(\forall) \varepsilon > 0, \quad (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$$

astfel încît, oricare ar fi diviziunea Δ a lui D cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor $(u_i, v_i) \in D_i$ să avem

$$|\sigma_{\Delta}(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon$$

Atunci punem

$$I = \iint_S F(x, y, z) \, d\sigma$$

și citim *integrala funcției F pe suprafața S* .

Observație Dacă presupunem că S este o suprafață materială iar $F(x, y, z)$ este densitatea suprafeței în punctul de coordonate x, y, z atunci dacă integrala funcției F pe suprafața S există, ea dă masa suprafeței S . Dacă F ar reprezenta densitatea de repartiție a unei sarcini electrice, integrala lui F pe suprafața S ar reprezenta sarcina electrică totală distribuită pe S .

Regula de calcul a integralei de suprafață de prima speță este dată de următoarea

Teorema 1.2. Dacă presupunem că integralele

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\sigma$$

$$\iint_D F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, du \, dv$$

există, atunci ele sînt egale.

Demonstrație. Din modul cum a fost definită aria unei suprafețe avem

$$\text{aria } S_i = \iint_{D_i} \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)} \, du \, dv$$

Deoarece funcția de sub semnul integrală este continuă, aplicînd formula de medie pentru integrala dublă, deducem existența unui punct $(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \in D_i$, astfel încît să avem

$$\text{aria } S_i = \sqrt{A^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + B^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + C^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i)} \cdot \text{aria } D_i$$

Dacă punem

$$\bar{\xi}_i = \varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \quad \bar{\eta}_i = \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \quad \bar{\zeta}_i = \chi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

avem

$$\sigma_{\Delta}(F_1, \bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) = \sum_{i=1}^n F(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \chi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{A^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + B^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + C^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i)} \text{ aria } D_i = \sigma_{\Delta}(H, \bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

unde

$$H(u, v) = F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}$$

iar $\sigma_{\Delta}(H, \bar{u}_i, \bar{v}_i)$ este o sumă Riemann relativ la funcția H , diviziunea Δ a lui D și la punctele $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Deoarece am presupune existența celor două integrale din enunț iar egalitatea

$$\sigma_{\Delta}(F, \bar{\xi}_i, \bar{\eta}_i, \bar{\zeta}_i) = \sigma_{\Delta}(H, \bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

se păstrează prin trecere la limită, rezultă egalitatea celor două integrale.

Observația 1) În condițiile teoremei de mai sus, dacă ținem seama de egalitatea (9) obținem

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \, du \, dv$$

Exemplu: Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} \, d\sigma$$

unde S este elipsoidul:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Pentru suprafața S avem reprezentarea parametrică

$$x = a \sin \theta \cos \varphi; \quad y = b \sin \theta \sin \varphi; \quad z = c \cos \theta;$$

$$\theta \in [0, \pi]; \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

În acest caz

$$d\sigma = abc \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}} \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

iar

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2}}$$

și deci

$$\begin{aligned} I &= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{b^2} + \frac{\cos^2 \theta}{c^2} \right) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} \pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right). \end{aligned}$$

Observația 2) Dacă suprafața S este dată de ecuația $z = f(x, y); (x, y) \in D$ iar f admite derivate parțiale continue atunci avem

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$$

Exemplu: Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S z \, d\sigma \text{ unde } S : z = x^2 + y^2 \text{ iar } D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Avem

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

și deci

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Trecând la coordonate polare avem

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho = \frac{\pi}{60} [1 + (1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} (6R^2 - 1)]$$

Observația 3) Dacă suprafața S este juxtapunerea a două suprafețe S_1 și S_2 simple și netede (ca în fig. 79) și dacă F este integrală pe S_1 și S_2 , atunci prin definiție

$$\iint_S F(x, y, z) d\sigma = \iint_{S_1} F(x, y, z) d\sigma + \iint_{S_2} F(x, y, z) d\sigma$$

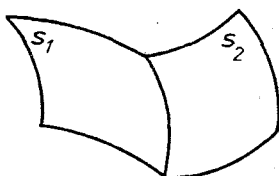


Fig. 79

Observația 4) Dacă suprafața S este o suprafață materială iar $\rho(x, y, z)$ este densitatea suprafeței în punctul (x, y, z) atunci coordonatele centrului de greutate sînt date de egalitățile

$$x_G = \frac{\iint_S x \rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z) d\sigma}; \quad y_G = \frac{\iint_S y \rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z) d\sigma};$$

$$z_G = \frac{\iint_S z \rho(x, y, z) d\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z) d\sigma}$$

iar momentele de inerție, de egalitățile

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$I_{ox} = \iint_S (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) d\sigma; \quad I_{oy} = \iint_S (z^2 + x^2) \rho(x, y, z) d\sigma;$$

$$I_{oz} = \iint_S (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\sigma$$

$$I_{oxy} = \iint_S z^2 \rho(x, y, z) d\sigma; \quad I_{oyz} = \iint_S x^2 \rho(x, y, z) d\sigma;$$

$$I_{ozx} = \iint_S y^2 \rho(x, y, z) d\sigma$$

§ 3. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE AL DOILEA TIP

Pentru a defini integrala de suprafață de al doilea tip trebuie să introducem mai întâi noțiunea de suprafață orientată.

Această noțiune este analoagă cu cea a orientării unei curbe.

Fie S o suprafață netedă, simplă dată parametric prin

$$\vec{r}(u, v) = \varphi(u, v) \vec{i} + \psi(u, v) \vec{j} + \chi(u, v) \vec{k}; (u, v) \in D$$

Fie $M'(u, v)$ un punct din D și $M(x, y, z)$ punctul corespunzător pe suprafața S . În punctul M putem considera doi vectori normală la suprafața S și anume

$$\vec{n}_1 = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}; \quad \vec{n}_2 = -\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \quad (12)$$

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar aparținând lui $S - bS$ și $\vec{n}(M)$ unul din cei doi vectori normali la suprafața S în punctul M .

Definiție 1.3. Spunem că suprafața S este bilateră (cu două pagini sau cu două fețe) dacă $\vec{n}(M)$ este funcție continuă în fiecare punct $M \in S - bS$. O suprafață bilateră împreună cu o alegere, cu o fixare, a unuia din cei doi vectori-normală se numește suprafață orientată.

Exemple: 1) Un plan este o suprafață bilateră. Orice porțiune a unui plan este o suprafață bilateră.

2) Orice suprafață netedă de forma $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ este bilateră.

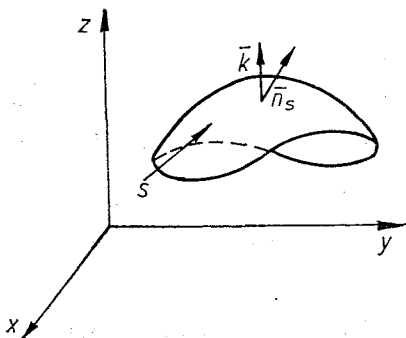


Fig. 80.

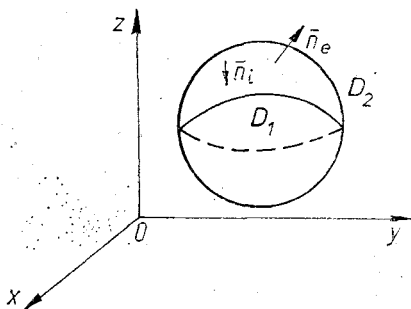


Fig. 81.

Dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei îndreptat în sus ($\vec{n}_s$) obținem pagina superioară a suprafeței; dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei îndreptat în jos, obținem pagina inferioară a suprafeței.

3) Orice suprafață S netedă, simplă și închisă este o suprafață bilateră. În acest caz există două domenii D_1 și D_2 , D_1 mărginit iar D_2 nemărginit așa fel încît

$$\text{Fr } D_1 = \text{Fr } D_2 = S \text{ și } D_1 \cup D_2 \cup S = \mathbb{R}^3.$$

Dacă în fiecare punct al lui S alegem sensul normalei ($\bar{n}_e$) îndreptat spre domeniul D_2 obținem pagina exterioară a suprafeței S . Dacă în fiecare punct al lui S alegem sensul normalei ($\bar{n}_i$) îndreptat spre domeniul D_1 obținem pagina interioară a suprafeței S .

Observația 1) O suprafață bilaterală mai poate fi caracterizată și în alt mod. Fie S o suprafață simplă, netedă și M un punct oarecare, aparținând lui $S - bS$. În punctul M alegem unul din cei doi versori-normală la suprafața S și-l notăm cu $\bar{n}$. Pe suprafața S considerăm o curbă Γ oarecare închisă care trece prin M și nu are puncte comune cu bordura lui S . Prin deplasarea continuă a vectorului normală $\bar{n}$ pe curba Γ , aceasta revine în M sau în poziția inițială sau coincide cu $-\bar{n}$. Dacă prima dintre aceste situații are loc pentru orice punct $M \in S - bS$ și orice curbă Γ atunci suprafața este bilaterală. Dacă, cea de a doua situație are loc pentru un punct $M \in S - bS$ și o curbă Γ , atunci suprafața S se numește unilaterală.

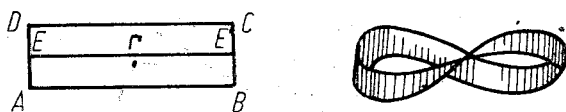


Fig. 82.

Un exemplu de suprafață unilaterală este banda lui Möbius care se construiește îndoind o foaie dreptunghiulară $ABCD$ în așa fel încât vârful A să coincidă cu C iar vârful B să coincidă cu D .

Pe suprafața astfel obținută, dacă ne deplasăm pe Γ pornind din punctul E cu un sens fixat $\bar{n}$, ajungem în punctul E' (care coincide cu E) cu sensul $-\bar{n}$.

Observația 2 Fie S o suprafață netedă bilaterală, dată parametric prin (7) sau (8). Cei doi versori-normală la suprafața S sînt dați de (12) sau de

$$\bar{n}_1 = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \bar{n}_2 = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{-\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Dacă facem o schimbare de variabile ca în condițiile teoremei 2.1 și ținem seama de egalitățile (11) obținem

$$\begin{aligned} \bar{n}_1 &= \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A'\bar{i} + B'\bar{j} + C'\bar{k}}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \cdot \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \right| \cdot \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \\ &= \frac{A'\bar{i} + B'\bar{j} + C'\bar{k}}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \operatorname{sgn} \frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \end{aligned}$$

Deci în cazul în care iacobianul transformării

$$\begin{aligned} u &= \lambda(u', v') \\ v &= \mu(u', v'), \end{aligned} \quad (u', v') \in D'$$

este pozitiv, atunci versorul normală este același.

Vom considera o problemă de fizică care sugerează definirea integralei de suprafață de al doilea tip.

Presupunem că într-un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ există un fluid în mișcare de masă specifică egală cu unitatea și

$$\vec{V}(x, y, z) = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}, \quad (x, y, z) \in \Omega$$

este câmpul vectorial al vitezelor particulelor de fluid.

Vrem să evaluăm cantitatea de fluid care trece printr-o suprafață bilateră $S \subset \Omega$, în unitatea de timp.

Cantitatea de fluid care trece printr-o porțiune $d\sigma$ (a suprafeței S) în unitatea de timp este egală cu volumul cilindrului avînd baza $d\sigma$ și înălțimea egală cu produsul scalar dintre $\vec{V}$ și $\vec{n}$ (normala la suprafața S). Dacă $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ atunci cantitatea de fluid care trece prin $d\sigma$ în unitatea de timp este egală cu $|\vec{V}| \cos(\vec{n}, \vec{v}) = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$.

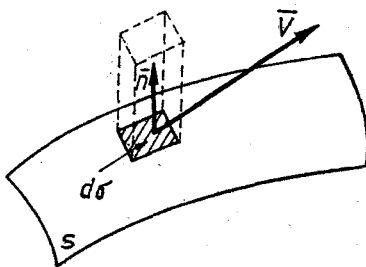


Fig. 83.

Este natural să considerăm că prin suprafața S trece în unitatea de timp o cantitate de fluid egală cu

$$\iint_S [P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma] d\sigma = \iint_S (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\sigma$$

În cazul general fie $\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ un câmp vectorial, unde P, Q, R sînt trei funcții reale definite și continue pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Fie $S \subset \Omega$ o suprafață netedă bilateră dată parametric prin $\vec{r}(u, v) = \varphi(u, v) \vec{i} + \psi(u, v) \vec{j} + \chi(u, v) \vec{k}$; $(u, v) \in D$ (domeniu care are arie) și fixăm o orientare pe S , alegînd

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$$

Suprafața S astfel orientată o notăm cu S_+ . În aceste condiții putem da următoarea

Definiție. 1.3. Integrala funcției vectoriale V pe suprafața S_+ (sau integrala de suprafață de al doilea tip), pe care o notăm cu

$$\iint_{S_+} P(x, y, z) dy dz + Q(x, y, z) dz dx + R(x, y, z) dx dy,$$

se definește prin egalitatea

$$\iint_{S_+} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, d\sigma$$

În mod asemănător se definește

$$\iint_{S_-} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = - \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, d\sigma$$

Dacă ținem seama de regula de calcul a integralei de suprafață de primul tip, dată în teorema 1.2 și de faptul că

$$\bar{n} = \frac{Ai + Bj + Ck}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \text{obținem}$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_+} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, d\sigma = \\ &= \iint_S \frac{P \cdot A + Q \cdot B + R \cdot C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \, d\sigma = \iint_D (P \cdot A + Q \cdot B + R \cdot C) \, du \, dv \end{aligned}$$

Am obținut deci, regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip:

$$\iint_{S_+} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iint_D (P \cdot A + Q \cdot B + R \cdot C) \, du \, dv,$$

unde

$$P = P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$Q = Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$R = R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

iar funcțiile $A = A(u, v)$, $B = B(u, v)$ și $C = C(u, v)$ sînt date la definiția 3.1.

Dacă folosim scrierea vectorială rezultatele de mai sus se pot scrie prin egalitățile următoare:

$$\begin{aligned} \iint_{S_+} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy &= \iint_S (\bar{V} \cdot \bar{n}) \, d\sigma = \iint_S \frac{(\bar{V}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|} \, d\sigma = \\ &= \iint_D (\bar{V}, \bar{r}_u, \bar{r}_v) \, du \, dv = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \chi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} & \frac{\partial \chi}{\partial v} \end{vmatrix} \, du \, dv \end{aligned}$$

În cazul în care suprafața netedă este de ecuație $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (domeniul care are arie) atunci versorul-normală, $\bar{n}_s$, corespunzător paginii superioare va fi

$$\bar{n}_s = \frac{-p\bar{i} - q\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

iar versorul-normală, corespunzător paginii inferioare va fi egal cu $-\bar{n}_s$.

Trebuie precizat că în practică fixarea orientării se face funcție de context.

Exemplul 1) Să se calculeze $I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z dx dy$ pe pagina exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

În cazul sferei date, știm că $\bar{n}_e = \frac{\bar{r}}{R} = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{R}$. Atunci $I = \iint_S \frac{x^3 + y^3 + z^3}{R} d\sigma$. Pentru sfera considerată avem reprezentarea parametrică

$$x = R \sin \theta \cos \varphi; y = R \sin \theta \sin \varphi; z = R \cos \theta$$

$$\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi] \text{ și deci}$$

$$I = R \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} (R^3 \sin^3 \theta \cos^3 \varphi + R^3 \sin^3 \theta \sin^3 \varphi + R^3 \cos^3 \theta) \sin \theta d\varphi = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

Exemplul 2) Să se calculeze

$I = \iint_S xz dy dz + yz dz dx + (x^2 + y^2) dx dy$ pe pagina superioară a lui $S: z = x^2 + y^2$; $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$. În acest caz avem $\bar{n}_s = \frac{-2x\bar{i} - 2y\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ și deci

$$I = \iint_S \frac{-2x^2z - 2y^2z + x^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} d\sigma = \iint_S \frac{(x^2 + y^2)(1 - 2z)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} d\sigma$$

Dacă ținem seama de regula de calcul a unei integrale de suprafață de primul tip avem,

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - 2y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3(1 - 2\rho^2) d\rho = \frac{-\pi}{6}$$

§ 4. FORMULA LUI STOKES

Această formulă stabilește o legătură între integrala curbilinie în spațiu și integrala de suprafață. Fie S o suprafață netedă, bilaterală și orientată, dată perimetric prin

$$\vec{r}(u, v) = \varphi(u, v)\vec{i} + \psi(u, v)\vec{j} + \chi(u, v)\vec{k}, \quad (u, v) \in D$$

(domeniu compact cu aria). Deci este fixat versorul-normală $\vec{n}$ la suprafața S . Presupunem că bordura lui S este curba Γ închisă, simplă și netedă. Pe curba Γ introducem o orientare pe care o numim compatibilă cu cea a suprafeței S . În fiecare punct $M \in \Gamma$ considerăm versorul-normală $\vec{n}$. Tot în punctul M considerăm vectorul $\vec{\tau}$ cu proprietatea că este perpendicular și pe $\vec{n}$ și pe Γ și „intră” în S .

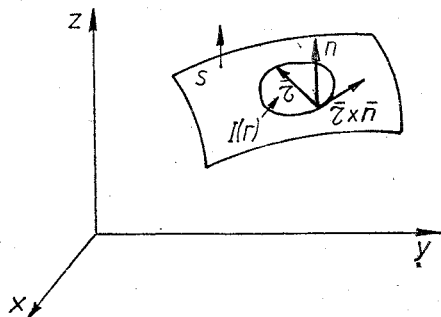


Fig. 84.

Orientarea de pe curba Γ dată de vectorul $\vec{\tau} \times \vec{n}$ se numește compatibilă cu cea a suprafeței S sau într-un limbaj mai sugestiv: orientarea pe Γ compatibilă cu cea a suprafeței S este dată de un observator care deplasându-se pe Γ are capul spre $\vec{n}$ și lasă la stînga suprafața S . Mai presupunem că suprafața S poate fi descompusă într-un număr finit de porțiuni de suprafață cu proprietatea că fiecare dintre ele poate fi reprezentată prin ecuații explicite în raport cu fiecare variabilă.

Putem enunța

Teorema 1.4. Dacă suprafața S și bordura sa Γ satisfac condițiile de mai sus iar

$$\vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$$

este un câmp vectorial definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ care conține suprafața S , iar funcțiile P, Q, R au derivate parțiale continue pe Ω atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (13)$$

Această formulă se numește „formula lui Stokes”.

Demonstrație. Din ipoteza făcută rezultă că suprafața poate fi luată de forma $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ cu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe D .

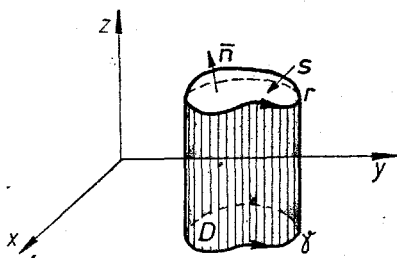


Fig. 85.

În acest caz proiecția suprafeței S pe planul xOy este D , iar proiecția lui Γ este frontiera lui D pe care o notăm cu γ .

Pentru a fixa ideile vom presupune că $\bar{n}$ este versorul-normală corespunzător paginii superioare, adică

$$\bar{n} = \cos \alpha \bar{i} + \cos \beta \bar{j} + \cos \gamma \bar{k} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \quad (14)$$

Demonstrăm egalitatea (13), transformând integrala curbilinie într-o integrală de suprafață după următoarea schemă:

$$\int_{\Gamma} \rightarrow \int_{\gamma} \rightarrow \iint_D \rightarrow \iint_S$$

Pentru început vom considera integrala

$$I_1 = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx$$

și observăm că

$$I_1 = \oint_{\Gamma} P(x, y, z) dx = \oint_{\gamma} P(x, y, f(x, y)) dx$$

deoarece Γ aparține suprafeței S (de ecuație $z = f(x, y)$). Dacă aplicăm formula lui Riemann-Green (în planul xOy) pentru ultima integrală și ținem seama de regula de derivare a funcțiilor compuse rezultă

$$\oint_{\gamma} P(x, y, f(x, y)) dx = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

Folosind expresiile (14) care dau cosinuşii directori ai normalei la suprafaţa S avem

$$\cos \alpha = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}; \cos \beta = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

de unde obţinem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos \beta}{\cos \gamma}$$

$$\text{Atunci } I_1 = - \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) dx dy$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei de suprafaţă de al doilea tip avem

$$I_1 = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \right) \cos \gamma d\sigma = - \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) d\sigma =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) d\sigma = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

Procedînd analog şi cu ceilalţi termeni ai integralei curbilinii din egalitatea (13) obţinem:

$$\oint_{\Gamma} Q dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial z} dy dz \text{ şi}$$

$$\oint_{\Gamma} R dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y} dy dz - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x} dz dx$$

Prin însumarea egalităţilor stabilite se obţine formula (13).

Observaţia 1 Dacă ţinem seama de definiţia integralei de suprafaţă de al doilea tip, formula (13) poate fi scrisă şi în forma

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \quad (16)$$

Formula lui Stokes poate fi scrisă sub o formă vectorială simplă.

Cu ajutorul rotorului formula lui Stokes, dacă ținem seama de (16) se pune sub forma:

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{V}) d\sigma$$

și din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că circulația câmpului vectorial $\vec{V}$ pe bordura unei suprafețe este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{V}$ prin acea suprafață.

Observația 2 În cazul în care suprafața S este o juxtapunere a două suprafețe netede S_1 și S_2 ca în fig. 86 și pe fiecare din ele funcționează formula lui Stokes atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} (\vec{n}_1 \cdot \text{rot } \vec{V}) d\sigma + \iint_{S_2} (\vec{n}_2 \cdot \text{rot } \vec{V}) d\sigma$$

unde $\Gamma = \text{Fr} \cdot S$; $\vec{n}_1$ este normala la S_1 și $\vec{n}_2$ este normala la S_2 .

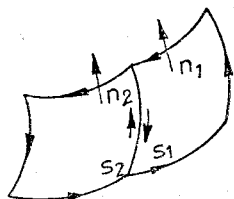


Fig. 86

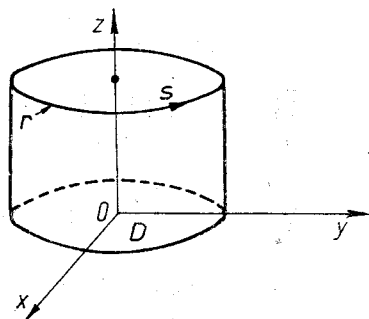


Fig. 87

Orientarea se face ca în fig. 86.

Exemplu. Să se calculeze $I = \oint_{\Gamma} -\frac{y^3 z^2}{3} dx + \left(\frac{x^3 z}{3} + 2\right) dy + zxy dz$

unde $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 1 \end{cases}$ parcursă în sensul indicat în fig. 87.

În acest caz $\text{rot } \vec{V} = \left(xz - \frac{x^3}{3}\right) \vec{i} + \left(-\frac{2y^3 z}{3} - yz\right) \vec{j} + (x^2 z + y^2 z^2) \vec{k}$ și $\vec{n} = \vec{k}$. Cu ajutorul formulei lui Stokes obținem

$$I = \iint_S (x^2 z + y^2 z^2) d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{\pi R^4}{2}$$

PROBLEME

1) Să se afle aria porțiunii de pe paraboloidul

$$Z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad (a > 0; b > 0) \text{ situată în interiorul cilindrului } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$$

$$R: \frac{2\pi}{3} ab[(1 + c^2)\sqrt{1 + c^2} - 1]$$

2) Să se afle aria porțiunii de pe conul $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$.

$$R: \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \pi$$

3) Să se afle aria porțiunii de pe conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$$R: \pi \sqrt{2}$$

4) Să se afle aria porțiunii de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 \pm 2ax = 0$

$$R: 4a^2 (\pi - 2)$$

5) Să se afle aria suprafeței

$$x = \operatorname{tg} u \cos v; y = \operatorname{tg} u \sin v; z = \frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin u}{\cos u} + v$$

$$\text{unde } u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], v \in [0, 2\pi];$$

$$R: \frac{8}{3} \pi$$

6) Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de primul tip

$$\iint_S (y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2) d\sigma \text{ unde } S \text{ este porțiunea din conul } z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2z = 0$

$$R: \frac{29}{8} \pi \sqrt{2}$$

$$7) \iint_S \frac{z d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}} \text{ unde } S \text{ este porțiunea din paraboloidul } 2az =$$

$= x^2 + y^2$ situată între planele $z = 0$ și $z = h$; $a > 0$; $h > 0$

$$R: \pi h^2$$

$$8) \iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}} \text{ unde } S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2; z \geq 0$$

$$R: \frac{2\pi a \sqrt{3}}{3} \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$9) \iint_S z d\sigma \text{ unde } S: x = u \cos v; y = u \sin v; z = v \text{ } u \in [0, a]; v \in [0, 2\pi];$$

$$R: \pi^2 [a \sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})]$$

10) Să se afle masa suprafeței materiale

$$z = \frac{1}{2} (x^2 + y^2); (0 \leq z \leq 1) \text{ dacă } \rho(x, y, z) = z$$

$$R: \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$$

11) Să se afle coordonatele centrului de greutate a suprafeței materiale omogene $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - x = 0$.

$$R: x_G = y_G = 0; z_G = \frac{16}{19}$$

12) Să se calculeze momentul de inerție I_{0z} a suprafeței materiale omogene ($\rho = \rho_0$): $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; z \geq 0$

$$R: \frac{4}{3} \pi a^4 \rho_0$$

13) Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de al doilea tip

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy \text{ pe pagina exterioară a sferei}$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = m^2$$

$$R: \frac{8}{3} \pi (a + b + c) \cdot m^3$$

$$14) \iint_S \frac{dy dz}{ax} + \frac{dz dx}{by} + \frac{dx dy}{cz} \text{ pe pagina interioară a elipsoidului } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$R: -4\pi \left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2} \right)$$

15) $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$; pe pagina exterioară a tetraedrului cu vîrfurile în punctele $(0, 0, 0); (1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)$

$$R: \frac{1}{12}$$

16) $\iint_S (x^2 + y^2) z \, dx \, dy$ pe pagina superioară a porțiunii de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$

$$R: \frac{25}{84} \pi$$

17) Folosind formula lui Stokes să se calculeze următoarele integrale curbilinii

$\oint_{\Gamma} (y^2 + z^2) \, dx + (z^2 + x^2) \, dy + (x^2 + y^2) \, dz$; unde Γ este definită de următoarea reprezentare parametrică

$$x = r(1 + \cos t); y = r \sin t; z = \sqrt{2r(a - r)(1 + \cos t)}; t \in [0, 2\pi]; a > r$$

Indicație: Imaginea curbei Γ se află la intersecția sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu cilindrul $x^2 + y^2 = 2rx$; $z \geq 0$

$$R: 2\pi ar^2$$

18) $\oint_{\Gamma} (y - z) \, dx + (z - x) \, dy + (x - y) \, dz$; unde imaginea curbei Γ se află la intersecția cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$ cu planul $bx + ay = ab$; $a > 0$; $b > 0$

$$R: \pm 2\pi a(a + b)$$

19) $\oint_{\Gamma} (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz$ unde imaginea curbei Γ se află la intersecția frontierei cubului $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq a$; $0 \leq z \leq a$ cu planul $2(x + y + z) = 3a$

$$R: \pm \frac{9a^3}{2}$$

CAPITOLUL X

INTEGRALE TRIPLE

§ 1. DEFINIȚIA INTEGRALEI TRIPLE

Cadrul firesc în care se definește integrala triplă este acela al domeniilor compacte $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, cu frontiera formată dintr-o reuniune finită de suprafețe netede. Se demonstrează [24] că astfel de domenii au volum. În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiția 1.1. Prin diviziune $\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ a domeniului compact Ω înțelegem un număr finit de domenii compacte $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ fără puncte interioare comune, astfel încît

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n$$

și $\text{Fr. } \Omega_i (i=1, 2, \dots, n)$ este o suprafață închisă netedă sau netedă pe porțiuni.

Prin norma diviziunii $\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ notată cu $v(\Delta)$ înțelegem numărul pozitiv dat de egalitatea

$$v(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} d(\Omega_i)$$

unde $d(\Omega_i)$ este diametrul domeniului Ω_i . Noțiunea de diviziune mai fină se definește în mod asemănător ca în cazul domeniilor plane.

Fie $\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ și funcția reală f definită și mărginită pe Ω . Vom nota cu

$$m = \inf_{(x,y,z) \in \Omega} f(x, y, z); \quad M = \sup_{(x,y,z) \in \Omega} f(x, y, z)$$

$$m_i = \inf_{(x,y,z) \in \Omega_i} f(x, y, z); \quad M_i = \sup_{(x,y,z) \in \Omega_i} f(x, y, z)$$

$$V(\Omega) = \text{volumul lui } \Omega$$

Formăm sumele

$$S_{\Delta}(f) = M_1 V(\Omega_1) + M_2 V(\Omega_2) + \dots + M_n V(\Omega_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n M_i V(\Omega_i) \quad (\text{suma superioară Darboux})$$

$$s_{\Delta}(f) = m_1 v(\Omega_1) + m_2 v(\Omega_2) + \dots + m_n v(\Omega_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^n m_i \cdot v(\Omega_i) \quad (\text{suma inferioară Darboux})$$

Dacă considerăm în fiecare domeniu Ω_i cîte un punct (ξ_i, η_i, ζ_i) atunci putem forma suma

$$\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \cdot v(\Omega_1) + \dots + f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \cdot v(\Omega_n) = \\ = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) v(\Omega_i) \text{ (suma Riemann)}$$

Proprietățile sumelor Darboux și Riemann sînt aceleași ca și în cazul unei funcții reale definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbb{R}^2$, iar demonstrarea lor nu prezintă nici o dificultate.

Definiția 2.1. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un domeniu compact $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Spunem că funcția f este integrabilă Riemann pe Ω , dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu $v(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$ să avem

$$|\sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon$$

În acest caz numărul I (dacă există) se numește integrala Riemann a funcției f pe domeniul Ω și se folosește notația

$$I = \lim_{v(\Delta) \rightarrow 0} \sigma_{\Delta}(f, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \text{ sau}$$

$$I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV$$

Criteriile de integrabilitate precum și proprietățile integralei triple se formulează și se demonstrează la fel ca și în cazul integralei duble.

§ 2. CALCULUL INTEGRALEI TRIPLE

O integrală triplă se calculează printr-o succesiune de integrale simple. Pentru început vom considera cazul în care Ω este un interval tridimensional $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$.

Teorema 1.2. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un interval tridimensional $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Să presupunem că

- 1) f este integrabilă pe I
- 2) pentru orice $(x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]$ există integrala

$$\int_e^g f(x, y, z) dz = F(x, y)$$

În aceste condiții există integrala $\iint_D F(x, y) dx dy$ și are loc egalitatea

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D \left(\int_e^g f(x, y, z) dz \right) dx dy$$

De obicei se folosește notația

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dz dy = \iint_D dx dy \int_e^g f(x, y, z) dz$$

Demonstrație

$d' = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$

$d'' = (c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m = d)$ o diviziune a intervalului $[c, d]$

$d''' = (e = z_0 < z_1 < \dots < z_k < \dots < z_p = g)$ o diviziune a intervalului $[e, g]$

Cu ajutorul diviziunilor d', d'', d''' putem defini o diviziune Δ a lui I , unde domeniile lui Δ sînt intervalele

$$I_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m-1; k = 0, 1, \dots, p-1)$$

iar cu ajutorul diviziunilor d' și d'' definim o diviziune Δ' a lui D , unde domeniile lui Δ' sînt intervalele

$$I'_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1, j = 0, 1, \dots, m-1)$$

Vom nota

$$m_{ijk} = \inf f(x, y, z); M_{ijk} = \sup f(x, y, z) \text{ unde } (x, y, z) \in I_{ijk}$$

Pentru a arăta că F este integrabilă pe D considerăm sumele Riemann asociate lui F pe D . Avem

$$\sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_i) (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j)$$

Dacă ținem seama de modul cum a fost definită funcția F și de proprietatea de aditivitate a integralei simple, avem

$$F(\xi_i, \eta_i) = \int_e^g f(\xi_i, \eta_i, z) dz = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_i, z) dz$$

Aplicînd formula de medie pentru integrala simplă, rezultă existența unui număr μ_{ijk} cu

$$m_{ijk} \leq \mu_{ijk} \leq M_{ijk} \text{ astfel încît}$$

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_i, z) dz = \mu_{ijk} (z_{k+1} - z_k)$$

Deci pentru sumele Riemann asociate lui F pe D , avem

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_i) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_i) (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} \mu_{ijk} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) (z_{k+1} - z_k) \end{aligned}$$

Dacă ținem seama de inegalitățile

$$m_{ijk} \leq \mu_{ijk} \leq M_{ijk} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1; j = 0, 1, \dots, m-1, \dots, \\ k = 0, 1, \dots, p-1)$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) (z_{k+1} - z_k) \leq \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_i) \leq \\ \leq \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) (z_{k+1} - z_k)$$

Dar prima sumă din aceste inegalități este tocmai suma Darboux inferioară, relativ la funcția f și la diviziunea Δ a lui I

$$s_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) (z_{k+1} - z_k)$$

Ultima sumă din inegalitățile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară relativ la funcția f și la diviziunea Δ a lui I

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk} (x_{i+1} - x_i) (y_{j+1} - y_j) (z_{k+1} - z_k)$$

Avem deci inegalitățile

$$s_{\Delta}(f) \leq \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_i) \leq S_{\Delta}(f)$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_i, η_i) .

Fie acum (d'_r) un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $v(d'_r) \rightarrow 0$, (d''_r) un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[c, d]$ cu $v(d''_r) \rightarrow 0$, fie (d'''_r) un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[e, g]$ cu $v(d'''_r) \rightarrow 0$. Notăm cu Δ_r diviziunea lui I definită, ca mai sus, de diviziunile d'_r, d''_r, d'''_r și cu Δ'_r diviziunea lui D definită de diviziunile d'_r și d''_r . Se vede imediat că din condițiile

$$v(d'_r) \rightarrow 0, v(d''_r) \rightarrow 0, v(d'''_r) \rightarrow 0 \text{ rezultă } v(\Delta_r) \rightarrow 0 \text{ și } v(\Delta'_r) \rightarrow 0$$

Pentru fiecare r avem inegalitățile

$$s_{\Delta_r}(f) \leq \sigma_{\Delta'_r}(F, \xi_i, \eta_i) \leq S_{\Delta_r}(f) \quad (1)$$

Funcția f fiind integrabilă pe I , avem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} s_{\Delta_r}(f) = \lim_{r \rightarrow \infty} S_{\Delta_r}(f) = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz \quad (2)$$

Trecînd la limită în (1) și ținînd cont de (2) avem

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta'_r}(F, \xi_i, \eta_i) = \iiint_I f(x, y, z) dx dy dz \quad (3)$$

Dacă ținem seama de definiția integralei duble, se vede imediat că

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sigma_{\Delta_r}(F, \xi_i, \eta_i) = \iint_D F(x, y) dx dy \quad (4)$$

Din egalitățile (3) și (4), obținem

$$\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D F(x, y) dx dy$$

și teorema este demonstrată.

Exemplu: Să se calculeze $y = \iiint_I xyz dx dy dz$ unde

$I = [0, 1] \times [2, 4] \times [5, 8]$. În acest caz avem $D = [0, 1] \times [2, 4]$ și deci

$$\begin{aligned} J &= \iint_D dx dy \int_5^8 xyz dz = \iint_D \frac{xyz^2}{2} \Big|_5^8 dx dy = \frac{39}{2} \int_0^1 dx \int_2^4 xy dy = \\ &= \frac{39}{2} \int_0^1 \frac{xy^2}{2} \Big|_2^4 dx = 117 \int_0^1 x dx = \frac{117}{2} \end{aligned}$$

Pentru a da regula de calcul a unei integrale triple în cazul în care domeniul Ω nu mai este un interval este necesară noțiunea de domeniu simplu în raport cu una din axe.

Să considerăm un domeniu compact D situat în planul xOy și fie două funcții reale ψ_1 și ψ_2 definite și continue pe D cu $\psi_1(x, y) \leq \psi_2(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in D$. Să notăm cu Ω domeniul compact din $\mathbf{R}^3$ dat de egalitatea

$$\Omega = \{(x, y, z); \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y); (x, y) \in D\}$$

Un astfel de domeniu se numește simplu în raport cu axa Oz și este ilustrat în fig. 88. Procedind exact ca în cazul teoremei de la integrala dublă avem:

Teorema 2.2. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact simplu în raport cu axa Oz , definit ca mai sus și fie f o funcție reală definită și mărginită pe Ω . Presupunem

1) f este integrabilă pe Ω

2) pentru $(\forall) (x, y) \in D$, există integrala $\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ (5)

Atunci există și integrala

$$\iint_D \left(\int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right) dx dy = \iiint_D f(x, y, z) dx dy$$

și are loc egalitatea

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_D dx \, dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz$$

Demonstrație. Funcțiile ψ_1 și ψ_2 au fost presupuse continue pe domeniul compact D , deci sînt și mărginite pe acest domeniu. Fie

$$e = \inf \psi_1(x, y) \text{ și } g = \sup \psi_2(x, y); (x, y) \in D$$

Dacă a și b sînt respectiv cea mai mică și cea mai mare abscisă a punctelor din D și iar c și d sînt respectiv cea mai mică și cea mai mare ordonată a punctelor din D , atunci considerăm intervalul

$$I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$$

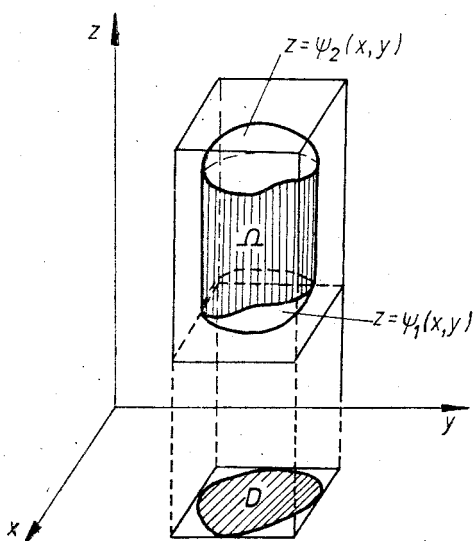


Fig. 88.

Se vede că $\Omega \subset I$ și acest fapt este ilustrat în fig. 88. Să considerăm funcția ajutătoare $\bar{f}$, definită pe I în modul următor

$$\bar{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dacă } (x, y, z) \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } (x, y, z) \in I - \Omega \end{cases}$$

Din modul cum a fost definită funcția $\bar{f}$ rezultă că este integrabilă pe I . Folosim proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcție de domeniu și obținem

$$\iiint_I \bar{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\Omega} \bar{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{I - \Omega} \bar{f}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

Dacă ținem seama de modul cum este definită funcția f rezultă imediat că

$$\begin{aligned} \iiint_{I-\Omega} \bar{f}(x, y, z) dx dy dz &= 0 \quad \text{și} \quad \iiint_{\Omega} \bar{f}(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$

Deci are loc egalitatea

$$\iiint_I \bar{f}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \quad (6)$$

Funcției $\bar{f}$ îi vom aplica regula stabilită în teorema precedentă. Pentru aceasta trebuie observat că integrala există, deoarece am presupus existența integralei (5) și în plus pentru fiecare $(x, y) \in D$ are loc egalitatea

$$\begin{aligned} \int_e^g \bar{f}(x, y, z) dz &= \int_e^{\psi_1(x, y)} \bar{f}(x, y, z) dz + \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \bar{f}(x, y, z) dz + \\ &+ \int_{\psi_2(x, y)}^g \bar{f}(x, y, z) dz = 0 + \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz + 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Funcția $\bar{f}$ satisface deci toate condițiile din teorema precedentă și putem scrie

$$\iiint_I \bar{f}(x, y, z) dx dy dz = \iint_{[a, b] \times [c, d]} dx dy \int_e^g \bar{f}(x, y, z) dz$$

Dacă ținem seama de egalitățile (6) și (7) avem

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

adică tocmai egalitatea din enunțul teoremei.

Observație: Teoreme asemănătoare se pot da pentru cazurile în care Ω este simplu în raport cu Oy sau Ox . Dacă domeniul Ω nu este simplu în raport cu nici una din axe, atunci prin plane paralele la unul din planele de coordonate poate fi descompus într-un număr finit de subdomenii, $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_p$ cu

$\Omega = \bigcup_{i=1}^p \Omega_i$ și fiecare Ω_i ($i = 1, 2, \dots, p$) să fie simplu în raport cu una din axe.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcție de domeniu avem

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \sum_{i=1}^p \iiint_{\Omega_i} f(x, y, z) dx dy dz$$

Exemplul 1. Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dx \, dy \, dz}{(1+x+y+z)^3} \text{ unde } \Omega \text{ este}$$

tetraedrul delimitat de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ și

$x+y+z=1$ (fig. 89). Se vede imediat că Ω este simplu în raport cu Oz și că $\psi_1(x, y) = 0$, $\psi_2(x, y) = 1-x-y$ iar

$$D = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1-x; 0 \leq x \leq 1\} \text{ (fig. 90)}$$

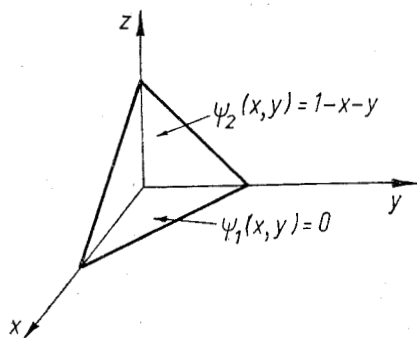


Fig. 89

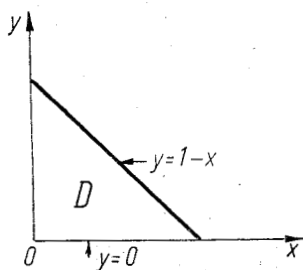


Fig. 90

Dacă aplicăm formula din teorema 2.2 avem

$$I = \iint_D dx \, dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Însă

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} &= -\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} - \frac{y}{4} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \ln(1+x) + \frac{(3-x)^2}{16} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

Exemplul 2. Să se calculeze integrala $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2)z \, dx \, dy \, dz$ unde domeniul Ω este mărginit de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ și de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$; $z \geq 0$ (fig. 91).

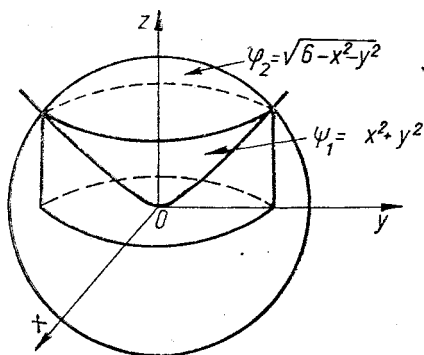


Fig. 91

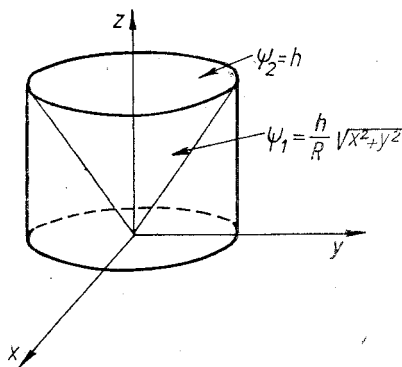


Fig. 92

În acest caz $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 2\}$ și deci avem

$$\begin{aligned} I &= \iint_D dx \, dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2 + y^2)z \, dz = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) z^2 \Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dx \, dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) [6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2] dx \, dy \end{aligned}$$

Dacă trecem la coordonate polare avem

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad \rho \in [0, \sqrt{2}] \text{ și}$$

deci

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (6 - \rho^2 - \rho^4) \rho \, d\rho = \frac{8\pi}{3}$$

Exemplul 3. Să se calculeze integrala $I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$; unde Ω este delimitat de conul $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ ($h > 0, R > 0$) și planul $z = h$ (fig. 92).

În acest caz $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$ și deci

$$I = \iint_D dx \, dy \int_{\frac{h}{R} \sqrt{x^2+y^2}}^h z \, dz = \frac{1}{2} \iint_D \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2} (x^2 + y^2) \right] dx \, dy$$

Dacă trecem la coordonate polare, obținem:

$$I = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - \rho^2) \rho \, d\rho = \frac{\pi R^2 h^2}{4}$$

§ 3. FORMULA LUI GAUSS-OSTROGRADSKY

Vom da în continuare o legătură între integrala de suprafață și integrala triplă. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un domeniu compact cu frontiera o suprafață S , simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Notăm cu S_e pagina exterioară a suprafeței S . Fie P, Q și R trei funcții reale definite și continue pe Ω . Presupunem că derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ există și sînt continue.

Teorema 1.3. În condițiile de mai sus are loc egalitatea

$$\oint_{S_e} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

numită formula integrală a lui Gauss-Ostrogradsky.

Demonstrație. Presupunem că Ω este descompus într-un număr finit de subdomenii simple în raport cu axa Oz . Dacă aplicăm proprietatea de

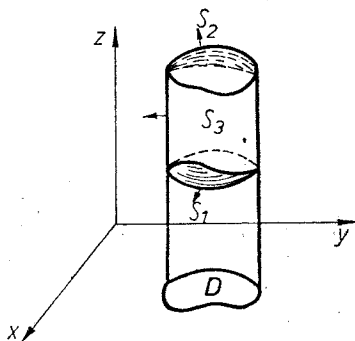


Fig. 93.

aditivitate pentru integrala de suprafață și pentru integrala triplă putem presupune chiar pe Ω simplu în raport cu axa Oz (fig. 93). În acest caz avem $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ și

$z = \psi_1(x, y); (x, y) \in D$ ecuația suprafeței S_1 ;

$z = \psi_2(x, y); (x, y) \in D$ ecuația suprafeței S_2 . Suprafața S_3 se află pe un cilindru cu generatoarele paralele cu axa Oz .

Dacă ținem seama de regula de calcul a integralei triple avem

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz &= \iint_D dx \, dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz = \\ &= \iint_D R(x, y, z) \Big|_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} dx \, dy = \iint_D R(x, y, \psi_2(x, y)) \, dx \, dy - \\ &\quad - \iint_D R(x, y, \psi_1(x, y)) \, dx \, dy \end{aligned}$$

Dar

$$\iint_D R(x, y, \psi_2(x, y)) dx dy = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy \quad (8)$$

și

$$-\iint_D R(x, y, \psi_1(x, y)) dx dy = \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy \quad (9)$$

unde pentru S_2 am luat pagina superioară care coincide cu pagina exterioară a lui S ($= \text{Fr. } \Omega$) iar pentru S_1 am luat pagina inferioară, care coincide cu pagina exterioară a lui S . Pe suprafața S_3 avem

$$\iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_3} R(x, y, z) \cos \gamma d\sigma = 0, \quad (10)$$

deoarece $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Dacă ținem seama de egalitățile (8), (9) și (10) avem

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oiint_{S_e} R(x, y, z) dx dy$$

unde integrala de suprafață este luată pe pagina exterioară a lui S . În mod asemănător se arată egalitățile

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \oiint_{S_e} P dy dz$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \oiint_{S_e} Q dz dx$$

Prin însumarea ultimelor trei egalități obținem

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{S_e} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \text{ sau}$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{S_e} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) d\sigma \quad (11)$$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$I = \oiint_{S_e} x^3 y^2 dy dz + x^2 y^3 dz dx + 3z dx dy$, unde S este frontiera domei-
niului mărginit de paraboloidii $z = x^2 + y^2$; $z = 6 - x^2 - y^2$; $0 \leq z \leq 6$.
În acest caz $P = x^3 y^2$; $Q = x^2 y^3$ și $R = 3z$

Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradsky, obținem

$$I = \iiint_{\Omega} (3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3) dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} (2x^2y^2 + 1) dx dy dz = \\ = 3 \iint_D dx dy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (2x^2y^2 + 1) dz \text{ unde } D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 3\}$$

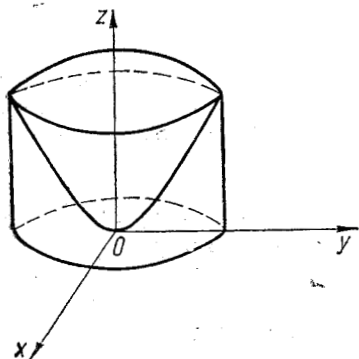


Fig. 94

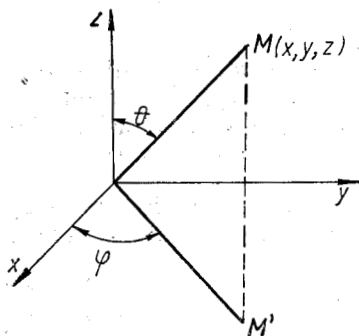


Fig. 95

Deci

$$I = 3 \iint_D (2x^2y^2 + 1) z \Big|_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} dx dy = 3 \iint_D (2x^2y^2 + 1) (6 - 2x^2 - 2y^2) dx dy.$$

Dacă trecem la coordonate polare

$$x = \rho \cos \theta; y = \rho \sin \theta; \rho \in [0, \sqrt{3}]; \theta \in [0, 2\pi] \text{ obținem}$$

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\rho^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1) (6 - 2\rho^2) \rho d\rho = \\ = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} 2\rho^5 (6 - 2\rho^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\rho + 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho (6 - 2\rho^2) d\rho = \\ = 6 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (6\rho^5 - 2\rho^7) d\rho + 6\pi \int_0^{\sqrt{3}} (6\rho - 2\rho^3) d\rho = \frac{297\pi}{8}$$

Observația 1) Dacă folosim scrierea vectorială, atunci formula lui Gauss-Ostrogradsky capătă o formă mai simplă.

Dacă ținem seama de egalitatea (11) și de definiția divergenței, atunci formula lui Gauss-Ostrogradsky se poate scrie sub forma

$$\oiint_{S_e} \vec{n} \cdot \vec{V} \cdot d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \cdot \vec{V} dx dy dz$$

$$\text{unde } \vec{V} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k},$$

adică fluxul câmpului vectorial $\vec{V}$ prin suprafața închisă S după normala exterioră $\vec{n}$, este egal cu integrala triplă a divergenței lui $\vec{V}$ pe domeniul Ω .

Observația 2) Dacă în formula lui Gauss-Ostrogradsky luăm $P = 0$; $Q = 0$ și $P = z$ obținem

$$\text{vol } \Omega = \oint\!\!\!\oint_{s.} z \, dx \, dy \quad (12)$$

§ 4. SCHIMBAREA DE VARIABILĂ LA INTEGRALA TRIPLĂ

Teorema de schimbare de variabile la integrala triplă se enunță asemănător cu teorema de schimbare de variabile la integrala dublă. Stabilirea ei se face într-un mod asemănător, de aceea nu vom da detalii de calcul care pot fi refăcute de cititor.

Teorema 1.4. Fie în spațiul (u, v, w) un domeniu compact Ω' avînd frontiera o suprafață simplă închisă și netedă pe porțiuni și fie

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w), \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega'$$

o transformare regulată de la spațiul (u, v, w) la spațiul (x, y, z) care aplică biunivoc domeniul Ω' pe domeniul Ω .

Dacă f este o funcție reală și continuă pe Ω , atunci are loc egalitatea

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \\ & = \iiint_{\Omega'} f(\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)) \cdot \left| \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \right| du \, dv \, dw \end{aligned} \quad (13)$$

numită formula schimbării de variabile la integrala triplă sau formula de transport.

Demonstrație. Fie $S' = \text{Fr } \Omega'$ și $S = \text{Fr } \Omega$ iar $u = u(s, t)$; $v = v(s, t)$; $w = w(s, t)$; $(s, t) \in D$ (domeniu compact din $\mathbf{R}^2$) o reprezentare parametrică a suprafeței S' . Atunci suprafața S va fi dată parametric prin

$$x = x(s, t) = \varphi[u(s, t), v(s, t), w(s, t)]$$

$$y = y(s, t) = \psi[u(s, t), v(s, t), w(s, t)], \quad (s, t) \in D$$

$$z = z(s, t) = \chi[u(s, t), v(s, t), w(s, t)]$$

Dacă folosim formula (12) și ținem seama de regula de calcul a unei integrale de suprafață de al doilea tip avem

$$V(\Omega) = \oint\!\!\!\oint_s z \, dx \, dy = \pm \iint_D z \frac{D(x, y)}{D(s, t)} \, ds \, dt$$

Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, se poate verifica prin calcul că

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} \cdot \frac{D(v, w)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} \cdot \frac{D(w, u)}{D(s, t)}$$

și deci

$$V(\Omega) = \pm \iint_D z \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} \cdot \frac{D(v, w)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} \cdot \frac{D(w, u)}{D(s, t)} \right] ds dt$$

Dacă ținem seama de regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip obținem că

$$V(\Omega) = \pm \oint_{S'} z \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} du dv + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} dv dw + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} dw du \right]$$

Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradsky și făcând calculele, găsim

$$V(\Omega) = \pm \iiint_{\Omega'} \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} du dv dw$$

Aplicând formula de medie la integrala triplă (asemănătoare celei de la integrala dublă) obținem

$$V(\Omega) = \left| \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \right|_{(u_0, v_0, w_0)} \cdot V(\Omega') \quad (14)$$

unde $(u_0, v_0, w_0) \in \Omega'$. Dacă ținem seama de această formulă în sumele Riemann și repetăm raționamentul făcut în teorema 2.6. cap. VIII obținem formula (13)

Observațiile făcute la integrala dublă în legătură cu schimbarea de variabile, rămân variabile și în acest caz.

Exemplul 1. Una dintre cele mai importante schimbări de variabile este trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice. Fie M un punct de coordonate carteziene x, y, z . Fie θ unghiul format de direcția pozitivă a axei Oz cu raza vectorie OM . Fie M' proiecția lui M pe planul xOy . Fie φ unghiul format de direcția pozitivă a axei Ox cu raza vectorie OM' . Fie ρ lungimea segmentului OM . Mărimile ρ, θ și φ constituie coordonatele sferice ale punctului M . Această denumire este justificată de faptul că pentru ρ fixat, se obține o suprafață sferică cu centrul în O vezi fig. 95. Se vede ușor că între coordonatele carteziene x, y și z a lui M și coordonatele sferice ale aceluiași punct, au loc egalitățile:

$$T: \begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \theta \end{cases}$$

În general avem: $\rho \geq 0; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Notăm cu I intervalul din $\mathbf{R}^3$ definit de inegalitățile

$$0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Transformarea T , care definește trecerea de la coordonatele sferice la coordonatele carteziene aplică intervalului I pe sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

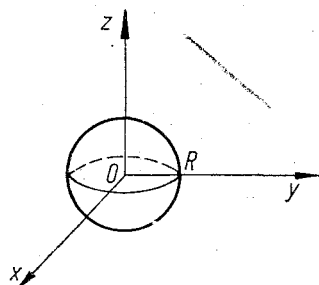
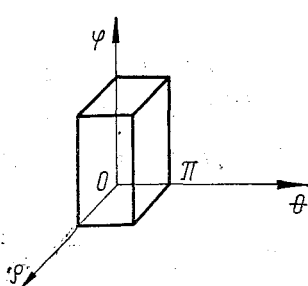


Fig. 96.

În acest caz

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ \rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta$$

și deci condiția de biunivocitate este neîndeplinită doar pe frontiera lui I .

a) Să se calculeze integrala

$J = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ unde $\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Dacă folosim schimbarea de variabile în coordonate sferice, avem

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^2 \rho^2 \sin \theta d\rho = \frac{\pi R^5}{10}$$

b) Să se calculeze integrala $J = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2}$; unde Ω este delimitat de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z \geq 0$ și planul xOy . În acest caz avem $\rho \in [1, 2]$; $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ și deci avem

$$\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\rho^2}{\rho^2} \sin \theta d\rho = 2\pi$$

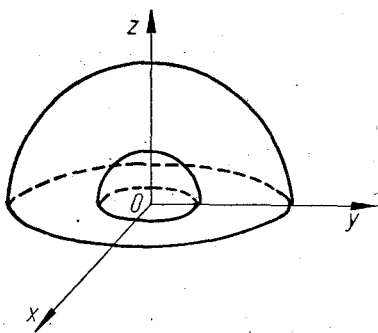


Fig. 97.

Exemplu 2. Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz; \text{ unde}$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

În acest caz se folosesc coordonatele sferice generalizate definite de $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$ cu $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ și $\varphi \in [0, 2\pi]$. Se arată cu ușurință că $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc \rho^2 \sin \theta$ și deci $I =$
 $= abc \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^4 \sin \theta d\rho = \frac{4\pi}{5} abc$

§ 5. APLICAȚII ALE INTEGRALEI TRIPLE

1) Dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ este un domeniu compact care are volum, atunci

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx dy dz$$

Exemplu 1. Să se calculeze volumul paralelipipedului Ω mărginit de planele $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$,

$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$ unde presupunem produsul $h_1h_2h_3 \neq 0$ și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

În acest caz facem schimbarea de variabile

$$u = a_1x + b_1y + c_1z; \quad v = a_2x + b_2y + c_2z; \quad w = a_3x + b_3y + c_3z$$

cu $u \in [-h_1, h_1]$, $v \in [-h_2, h_2]$, $w \in [-h_3, h_3]$ și avem

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\Delta}$$

deci

$$\text{vol } \Omega = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{dw}{\Delta} = \frac{8h_1h_2h_3}{\Delta}$$

Exemplu 2. Să se calculeze volumul lui $\Omega = \left\{ (x, y, z); \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1 \right\}$. În acest caz se face schimbarea de variabile $x = a\rho \sin^3 \theta \cos^3 \varphi$;
 $y = b\rho \sin^3 \theta \sin^3 \varphi$; $z = c\rho \cos^3 \theta$

$$\rho \in [0, 1]; \quad \theta \in [0, \pi]; \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

În acest caz $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = 9abc\rho^2 \sin^5 \theta \cos^2 \theta \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$ și deci

$$\begin{aligned} \text{vol } \Omega &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = 9abc \int_0^{\pi} \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = \\ &= \frac{4}{35} \pi abc \end{aligned}$$

II) Dacă $\rho(x, y, z)$ este densitatea în punctul de coordonate x, y, z a unui corp material care ocupă domeniul Ω și ρ este continuă, atunci masa acestui corp este dată de egalitatea

$$\text{masa } \Omega = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dx dy dz$$

III) Coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_G a unui corp material de densitate ρ care ocupă domeniul Ω sînt date de egalitățile

$$x_G = \frac{1}{\text{masa } \Omega} \iiint_{\Omega} x \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$y_G = \frac{1}{\text{masa } \Omega} \iiint_{\Omega} y \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$z_G = \frac{1}{\text{masa } \Omega} \iiint_{\Omega} z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

Dacă $\rho = \text{constant}$ (corp omogen) atunci

$$x_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} x \, dx \, dy \, dz; \quad y = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} y \, dx \, dy \, dz;$$

$$z_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$$

IV. Momentele de inerție ale unui corp material, de densitate ρ care ocupă domeniul Ω , sînt date de egalitățile:

$$I_{0x} = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \quad I_{0y} = \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{0z} = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{0xy} = \iiint_{\Omega} z^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad I_{0zx} = \iiint_{\Omega} y^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{0xz} = \iiint_{\Omega} x^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_0 = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

V. Potențialul newtonian sau gravitațional al unui punct material de masă m se definește prin formula

$$U = \frac{m}{r}$$

unde r este distanța de la punctul material pînă la punctul din spațiu în care se consideră potențialul. În cazul unui corp material, care ocupă domeniul Ω , potențialul newtonian în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ va fi dat de formula:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

unde $\rho(x, y, z)$ este densitatea în punctul $(x, y, z) \in \Omega$.

VI. Atracția exercitată de un corp. Să considerăm mai întii două puncte materiale P_1 și P_2 de mase m_1 , respectiv m_2 . Notăm cu r_{12} distanța de la P_1 și P_2 , mărimea forței de atracție dintre cele două puncte materiale este dată de formula.

$$F = \lambda \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}$$

unde λ este o constantă. Notînd cu $\bar{r}_{12} = \overline{P_1 P_2}$, forța $\bar{F}_{12}$ cu care P_1 este atras de P_2 este dată de formula

$$\bar{F}_{12} = \lambda \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^3} \bar{r}_{12}$$

Dacă P_1 , are coordonatele x_1, y_1, z_1 , iar P_2 are coordonatele x_2, y_2, z_2 atunci proiecțiile pe axe de coordonate ale acestei forțe sînt

$$X_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (x_2 - x_1); \quad Y_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (y_2 - y_1)$$

$$Z_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (z_2 - z_1)$$

unde

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Să considerăm acum un punct material $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de masă m și un corp material care ocupă domeniul $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

În acest caz, proiecțiile pe axe ale forței $\bar{F}$ cu care P_0 este atras de corpul material sînt date de formulele

$$F_x = \lambda m \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (x - x_0) dx dy dz$$

$$F_y = \lambda m \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (y - y_0) dx dy dz$$

$$F_z = \lambda m \iiint_{\Omega} \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (z - z_0) dx dy dz$$

unde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

ar $\rho(x, y, z)$ este densitatea în punctul $(x, y, z) \in \Omega$

PROBLEME

Să se calculeze următoarele integrale triple

$$1) \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz; \text{ unde } \Omega \text{ este mărginit de următoarele supra-}$$

$$\text{fețe: } 2z = x^2 + y^2; \quad z = 2$$

$$R: \frac{\pi 16}{3}$$

2) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$; unde Ω este mărginit de următoarele suprafețe: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 1$ $R: \frac{\pi}{6}$

3) $\iiint_{\Omega} x^2 \, dx \, dy \, dz$; unde Ω este mărginit de următoarele suprafețe: $z = ay^2$; $z = by^2$; $y > 0$; $(0 < a < b)$; $z = \alpha x$; $z = \beta x$; $(0 < \alpha < \beta)$; $z = h > 0$ $R: \frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}$

4) $\iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx \, dy \, dz$ unde Ω este mărginit de suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = x$ $R: \frac{\pi}{10}$

5) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ unde $\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az; x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2; a > 0\}$ $R: \frac{\pi a^5}{5} \left(18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right)$

6) $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$ unde $\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 \leq z^2; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2; z > 0\}$ $R: \frac{\pi a^5}{5} (2 - \sqrt{2})$

7) Să se calculeze masa corpului material care ocupă domeniul

$$\Omega = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$$

și are densitatea $\rho(x, y, z) = xyz$;

$$R: \frac{1}{48}$$

Să se calculeze volumele domeniilor mărginite de următoarele suprafețe:

8) $z = x^2 + y^2$; $z = 2(x^2 + y^2)$; $y = x$; $y = x^2$; $R: \frac{3}{35}$

9) $az = x^2 + y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($a > 0$) $R: \frac{\pi a^3}{6}$

$$10) z = 6 - x^2 - y^2; z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad R: \frac{32}{3} \pi$$

$$11) x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x^2 + y^2 + z^2 = b^2; x^2 + y^2 = z^2$$

$$(z \geq 0); (0 < a < b); \quad R: \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) (b^3 - a^3)$$

$$12) (x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z; \quad R: \frac{\pi a^3}{3}$$

13) Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului material omogen care ocupă domeniul

$$\Omega = \left\{ (x, y, z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0 \right\}$$

$$R: x_G = \frac{3}{8} a; y_G = \frac{3}{8} b; z_G = \frac{3}{8} c;$$

14) Să se calculeze momentul de inerție în raport cu axa oz a corpului material și omogen care ocupă domeniul mărginit de suprafețele

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2; x^2 + y^2 = z^2; z \geq 0$$

$$R: I_{0z} = \frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2} - 5)$$

15) Să se calculeze momentele de inerție în raport cu planele de coordonate, ale corpului material omogen care ocupă domeniul mărginit de suprafețele

$$z = c > 0; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

$$R: I_{x0y} = \frac{\pi abc^3}{5}; I_{y0z} = \frac{\pi a^3 bc}{5}; I_{z0x} = \frac{\pi ab^3 c}{5}$$

Folosind formula lui Gauss-Ostrogradsky să se calculeze următoarele integrale de suprafață de al doilea tip

$$16) \oint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy \text{ pe pagina exterioară a frontierei lui } \Omega = \{(x, y, z); 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq a; 0 \leq z \leq a\};$$

$$R: 3a^4$$

$$17) \oint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy \text{ pe pagina exterioară a sferei}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2; \quad R: \frac{12}{5} \pi a^5$$

CAPITOLUL XI

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNȚII

§ 1. INTRODUCERE

Rezolvarea unor probleme de analiză, de geometrie, de fizică sau tehnică se reduc la rezolvarea unor ecuații, numite ecuații diferențiale ordinare sau mai simplu, ecuații diferențiale, care leagă între ele o variabilă independentă x , o funcție necunoscută de x , pe care o notăm cu y și derivatele ei succesive $y', y'' \dots, y^{(n)}$ pînă la un anumit ordin n . Prin urmare o ecuație diferențială are forma

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

unde funcția reală F , de argumente $x, y, y', \dots, y^{(n)}$ este definită și continuă într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Dacă derivata de ordinul cel mai mare $y^{(n)}$ intră efectiv în ecuația diferențială, zicem că ecuația este de ordinul n . Dacă ecuația (1) se poate rezolva în raport cu $y^{(n)}$ avem

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

unde funcția reală f , de argumente $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$, este definită și continuă într-un domeniu din $\mathbf{R}^{n+1}$. În cazul particular $n = 1$, ecuația diferențială de ordinul întâi se scrie sub forma

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in D \quad (3)$$

această formă se numește „normală”.

Definiție. Spunem că funcția $\varphi: I \rightarrow \mathbf{R}$, unde I este interval, este soluție a ecuației (1) dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

- a) funcția φ este derivabilă de n ori pe I ,
- b) $\{(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)); \quad x \in I\} \subset D$.
- c) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0; \quad (\forall) \quad x \in I$

În unele cazuri în locul soluției φ se găsește o relație de forma

$$G(x, y) = 0$$

care definește soluția φ ca funcție implicită de x . Graficul unei soluții este o curbă plană, numită curbă integrală. În continuare vom considera două probleme care ne conduc la rezolvarea unor ecuații diferențiale.

1) Notăm cu $R(t)$ cantitatea de radiu existentă la un moment t într-un recipient. Vrem să găsim legea matematică după care radiul se dezintegrează, adică să găsim formula care ne dă cantitatea de radiu la momentul $t > t_0$ dacă la momentul t_0 era o cantitate egală cu R_0 . Viteza de dezintegrare a radiului este proporțională cu cantitatea de radiu existentă la momentul t și este egală cu $-\dot{R}(t)$.

Prin urmare $R(t)$ verifică ecuația diferențială de ordinul întâi

$$\dot{R}(t) = -kR(t) \quad (4)$$

unde k este un factor de proporționalitate. Se verifică imediat că orice funcție de forma

$$R(t) = C e^{-k(t-t_0)}$$

unde C este o constantă arbitrară, este soluție a ecuației (4). Ecuația admite o familie de soluții depinzând de parametrul C .

Se pune în mod natural problema de a alege din această familie, soluția care satisface condiția

$$R(t_0) = R_0$$

numită condiție inițială. Se constată fără greutate că soluția problemei este

$$R(t) = R_0 e^{-k(t-t_0)}$$

În multe alte probleme de fizică sau tehnică, ce conduc la o ecuație diferențială de ordinul întâi se pune asupra ecuației diferențiale o problemă analogă cu cea pusă mai sus. De aceea trebuie să se dea o atenție deosebită următoarei probleme, numită *problema lui Cauchy*, care se formulează în general în modul următor.

Fiind dată ecuația diferențială de ordinul întâi

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in D \quad (3)$$

să se determine soluția ei, care satisface condiția

$$y(x_0) = y_0$$

numită *condiție inițială* sau *condiția lui Cauchy*.

Din punct de vedere geometric, problema lui Cauchy constă în a determina curba integrală a ecuației diferențiale (3) care să treacă prin punctul (inițial) M_0 de coordonate x_0, y_0 .

2) Să studiem mișcarea unui punct material M pe o dreaptă verticală sub acțiunea de atracție a pământului. Luăm un sistem de axe în care originea o situăm la suprafața pământului iar axa Oy o situăm după dreapta verticală pe care se mișcă punctul M . Sensul pozitiv pe axa Oy va fi considerat de jos în sus. Pentru a cunoaște poziția punctului M la orice moment t după începerea mișcării (corespunzătoare lui $t = 0$) trebuie să cunoaștem valoarea coordonatei y în funcție de t . La momentul $t = 0$ (momentul inițial) presupunem cunoscută poziția y_0 (poziția inițială) a punctului M precum și viteza sa v_0 (viteza inițială).

Din interpretarea mecanică a derivatei de ordinul al doilea, rezultă că accelerația este egală cu $y''(t)$.

Pe de altă parte știm că accelerația forței gravitaționale într-o vecinătate a suprafeței pământului este constantă și egală (aproximativ) cu

$$g = 981 \text{ cm/sec}^2$$

În sistemul nostru de coordonate, accelerației gravitaționale îi atașăm semnul — deoarece este dirijată în jos. Egalînd cele două expresii obținute pentru accelerația punctului material M sîntem conduși la următoarea ecuație diferențială de ordinul doi:

$$y'' = -g \quad (5)$$

Să verificăm imediat că orice funcție de forma

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1t + C_2$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare, este soluție a ecuației (5). Ecuația admite astfel o familie de soluții depinzînd de doi parametri C_1 și C_2 . Se pune problema de a alege din această familie, soluția care satisface condițiile

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = v_0$$

numite condiții inițiale. Se verifică imediat că funcția

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0t + y_0$$

este soluție a ecuației (5) și că

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = v_0$$

În multe alte probleme de fizică sau tehnică, ce conduc la o ecuație diferențială de ordinul n , se pune asupra ecuației diferențiale o problemă analogă cu cea pusă în acest exemplu. Trebuie acordată o atenție deosebită următoarei probleme numită problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale de ordinul n . În general *problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale de ordinul n*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (2)$$

este următoarea:

Să se determine soluția ecuației diferențiale (2) care să satisfacă la condițiile

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (6)$$

numite condiții inițiale sau condițiile lui Cauchy.

În condițiile (6), $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ sînt numere date.

Exemplele date mai sus sînt suficiente pentru a arăta că diverse probleme de analiză, de geometrie, de fizică sau de tehnică conduc la ecuații diferențiale.

În multe cazuri s-a constatat că asupra ecuațiilor diferențiale se pune o aceeași problemă și anume problema lui Cauchy. Ecuațiile diferențiale astfel legate de fenomene naturale sînt de o deosebită importanță. Astăzi ele se studiază ca o disciplină aparte în matematică, de-sine-stătătoare, fără să se țină seamă de problemele care le-a dat naștere.

În tot ce urmează mai departe ne vom ocupa de două probleme. Una dintre ele este determinarea tuturor soluțiilor unei ecuații diferențiale date. Se spune în acest caz că se face integrarea ecuației diferențiale. A doua problemă este problema lui Cauchy. Se va vedea că există o strînsă legătură între cele două probleme.

În continuare vom considera cîteva ecuații diferențiale de forma $y' = f(x, y)$; $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$; D —domeniu; pentru care vom da metode de integrare. Vom arăta că integrarea lor se reduce la calculul unor integrale, adică la efectuarea unor cuadraturi. Din această cauză ecuațiile de care ne vom ocupa se vor numi ecuații diferențiale de ordinul întâi integrabile prin cuadraturi. În unele cazuri metoda de integrare ne va conduce la soluțiile ecuației diferențiale considerate, sub forma $y(x) = g(x, C)$, unde C este o constantă arbitrară. Funcția $g(x, C)$ se numește soluția generală a ecuației diferențiale; cu ajutorul ei obținem toate soluțiile ecuației diferențiale, afară poate de unele soluții. O definiție precisă a noțiunii de soluție generală o vom da după teorema de existență și unicitate a ecuațiilor diferențiale. În alte cazuri, metoda de integrare ne va conduce la o ecuație de forma

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

unde C este o constantă arbitrară, care rezolvată în raport cu y ne dă soluția generală a ecuației diferențiale.

§ 2. ECUAȚII CU VARIABLE SEPARABILE

Sînt ecuații de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y) \quad (7)$$

unde $f: (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$; $g: (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$; f și g continue.

O soluție a ecuației (7) este o funcție

$$\varphi: (\alpha, \beta) \subset (a, b) \rightarrow (c, d)$$

derivabilă și astfel încît

$$\varphi'(x) = f(x) g(\varphi(x)) \quad (\forall) \quad x \in (\alpha, \beta)$$

Presupunem $g(y) \neq 0$; $(\forall) \quad y \in (c, d)$. Vrem să aflăm proprietățile funcției φ pentru ca apoi să deducem un procedeu de determinare a sa. Deoarece φ este soluție a ecuației (7) avem

$$f(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}$$

Fie $G: (c, d) \rightarrow \mathbf{R}$ o primitivă a funcției $\frac{1}{g}$, deci este derivabilă și $G' = \frac{1}{g}$.
 Funcția compusă $G(\varphi)$ este derivabilă și are loc egalitatea

$$(G(\varphi))' = G'(\varphi)\varphi' \text{ adică}$$

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \frac{1}{g(\varphi(x))} \varphi'(x) = f(x)$$

Cu alte cuvinte are loc egalitatea $(G(\varphi))' = f$. Dacă F este o primitivă a funcției f , în intervalul (α, β) avem

$$G(\varphi(x)) = F(x) + C$$

unde C este constantă arbitrară. Deoarece $\frac{1}{g} \neq 0$ funcția G este monotonă și prin urmare inversibilă. Deducem că

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Am obținut că dacă φ este soluție a ecuației (7) atunci

$$\varphi = G^{-1}(F + C) \quad (8)$$

unde F este o primitivă a lui f , G o primitivă a lui $\frac{1}{g}$, iar C o constantă arbitrară. Vom arăta reciproc că orice funcție de forma (8) este o soluție a ecuației (7).

În adevăr dacă $\varphi(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ atunci $G(\varphi(x)) = F(x) + C$ și derivând obținem $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x)$ de unde

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(\varphi(x))}; \text{ adică } \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$$

Din ultima relație deducem că $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$, cu alte cuvinte funcția φ considerată mai sus este soluție a ecuației (7).

Intervalul de definiție al funcției φ este format din mulțimea punctelor $x \in (a, b)$ astfel încât $F(x) + C$ să se afle în domeniul de definiție al funcției G^{-1} , adică în domeniul valorilor funcției G , deci între $\lim_{y \rightarrow c} G(y)$ și $\lim_{y \rightarrow d} G(y)$.

Observație. În condițiile date mai sus, este justificat acum procedeul care urmează. Se scrie ecuația (7) sub forma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx \quad (9)$$

și integrând ambii membri ai ecuației (9) obținem

$$G(y) = F(x) + C$$

unde G este o primitivă a funcției $\frac{1}{g}$, iar F o primitivă a funcției f . Din ultima egalitate găsim

$$y = G^{-1}(F(x) + C)$$

Exemplu: Să se integreze ecuația $y' = (y^2 + 1)(x^2 + 1)$. Scriem ecuația sub forma (9);

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = (x^2 + 1) dx$$

Integrând obținem

$$\arctg y = \frac{x^3}{3} + x + C, \text{ de unde}$$

$$y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^3}{3} + x + C \right).$$

§ 3. ECUAȚII OMOGENE

Sînt ecuații de forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \quad (10)$$

În general spunem că o funcție de două variabile $f(x, y)$ este omogenă de gradul m dacă $f(tx, ty) = t^m f(x, y)$. În cazul nostru membrul drept al ecuației (10) este o funcție omogenă de gradul zero. Pentru a găsi soluția ecuației (10) procedăm ca și în cazul ecuațiilor cu variabile separabile

Fie $g: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbf{R}$ și φ o soluție a ecuației (10) definită pe un interval I care nu conține pe $x = 0$ și atunci pentru $x \in I$ avem

$$\frac{\varphi(x)}{x} \in (\alpha, \beta) \text{ și } \varphi'(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

Facem schimbarea de funcție $u(x) = \frac{\varphi(x)}{x}: I \rightarrow (\alpha, \beta)$

Funcția u este derivabilă pe I și

$$u' = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x} \right)$$

Folosind faptul că φ a fost presupusă soluție a ecuației (10) obținem

$$u'(x) = \frac{1}{x} \left[g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x} \right] \text{ sau}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x} [g(u(x)) - u(x)]$$

Rezultă că u este soluție a ecuației cu variabile separabile

$$u' = \frac{1}{x} (g(u) - u) \quad (11)$$

și deci funcția u poate fi determinată, pînă la o constantă, ceea ce implică posibilitatea de a determina soluția φ . Vom arăta că orice soluție a ecuației

cu variabilele suprabile (11) determină o soluție a ecuației omogene (10). În adevăr, dacă

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x} [g(u(x)) - u(x)] \text{ și } \varphi(x) = xu(x), \text{ atunci} \\ \varphi'(x) &= u(x) + xu'(x) = u(x) + x \frac{g(u(x)) - u(x)}{x} = g(u(x)) = \\ &= g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right); \text{ adică } \varphi'(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

De aici rezultă că integrarea ecuației diferențiale omogene (10) s-a redus la integrarea ecuației diferențiale (11) cu variabile separabile. Se trece de la ecuația (10) la ecuația (11) făcându-se în ecuația (10) schimbarea de variabilă

$$y = xu$$

unde u este noua funcție necunoscută.

Exemplu 1. Să se integreze ecuația diferențială omogenă

$$y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}; \quad \frac{y}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $y = xu$, avem $y' = u + xu'$ și înlocuind în ecuația dată avem

$$xu' + u = u + \operatorname{tg} u \text{ sau } xu' = \operatorname{tg} u$$

care este o ecuație cu variabile separabile.

$$\frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{dx}{x} \text{ care integrată ne conduce la relația}$$

$$\ln |\sin u| = \ln |x| + \ln |C| \text{ sau } \sin \frac{y}{x} = Cx.$$

Exemplu 2. Să se integreze ecuația $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Dacă facem schimbarea de variabile $y = xu$, obținem

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u} \text{ sau } xu' = \frac{1+u^2}{1-u}; \quad \frac{1-u}{1+u^2} du = \frac{dx}{x}.$$

Integrând ultima ecuație obținem

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} u - \frac{1}{2} \ln(1+u^2) = \ln |x| + \ln |C| \text{ sau}$$

$$\operatorname{arg} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + y^2}{x^2} + \ln |x| + \ln |C|$$

$$C \sqrt{x^2 + y^2} = e^{\operatorname{arg} \operatorname{tg} \frac{y}{x}}$$

Observație. Dacă în ecuația cu variabile separabile (11) există un număr u_0 așa fel încît $g(u_0) - u_0 = 0$ atunci se verifică cu ușurință că $y = u_0 x$ este soluție a ecuației (10), care nu intră în soluția generală. Soluțiile cu această proprietate se numesc soluții singulare.

§ 4. ECUAȚII REDUCTIBILE LA ECUAȚII OMOGENE

Fie ecuația diferențială

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (12)$$

sînt posibile două situații:

a) Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, facem schimbarea de variabile

$$X = x - x_0; \quad Y = y - y_0$$

unde (x_0, y_0) este soluția sistemului liniar

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Cu această schimbare de variabile ecuația (12) devine

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{Y}{X}}{a_2 + b_2 \frac{Y}{X}}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (13)$$

care este o ecuație omogenă.

Exemplu. Să se integreze ecuația $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$. Rezolvînd sistemul de ecuații $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$; obținem $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Facem schimbarea de variabile $X = x - 1$; $Y = y - 2$ sau $x = X + 1$; $y = Y + 2$ și înlocuim în ecuația dată; obținem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

Făcînd schimbarea de variabilă $Y = Xu$, avem

$$u + Xu' = \frac{1 - u}{1 + u} \text{ sau } \frac{1 + u}{1 - 2u - u^2} du = \frac{dX}{X}, \text{ de unde}$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - 2u - u^2| = \ln |X| - \frac{1}{2} \ln |C| \Rightarrow C = X^2(1 - 2u - u^2)$$

Înlocuind pe u avem $X^2 - 2XY - Y^2 = C$

Dacă revenim la variabilele x și y obținem

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1$$

b) Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ atunci $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ și ecuația (12) devine

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y) \quad (14)$$

În acest caz facem schimbarea de variabilă $a_2x + b_2y = u$ și ecuația (14) devine

$$u' = a_2 + b_2 \cdot g(u)$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $y' = \frac{2x - 4y + 1}{x - 2y + 3}$. În acest caz facem schimbarea de variabilă $u = x - 2y$, de unde

$$u' = 1 - 2y' = 1 - 2 \frac{2u + 1}{u + 3} \text{ sau } u' = \frac{-3u + 1}{u + 3},$$

ecuație cu variabile separabile.

Integrând ultima ecuație obținem

$$C = (1 - 3u)^{10/9} e^{\frac{u}{3} + x}$$

$$C = (1 - 3x + 6y)^{10/9} e^{\frac{4x - 2y}{3}}$$

§ 5. ECUAȚII LINIARE

Ecuatiile de forma

$$y' = P(x)y + Q(x) \quad (15)$$

unde P și Q sînt două funcții definite și continue pe un interval I , se numesc ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi. Cînd funcția Q este identic nulă, ecuația se numește liniară și omogenă (cuvîntul omogen are aici alt sens decît cel dat anterior). Dacă Q nu este identic nulă ecuația se numește liniară neomogenă. Integrarea ecuației liniare neomogenă (15) se face în două etape. a) Se integrează mai întîi ecuație liniară și omogenă atașată ecuației (15)

$$y' = P(x)y \quad (16)$$

și soluția ei generală servește apoi la integrarea ecuației neomogene. Ecuația (16) este o ecuație cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y} = P(x) dx$$

Integrînd se deduce

$$\ln |y| = \int_{x_0}^x P(t) dt + \ln |C| \quad (17)$$

de unde rezultă imediat soluția generală

$$y = C e^{\int_{x_0}^x P(t) dt}$$

b) Integrarea ecuației diferențiale liniare, neomogene (15). Vom întrebuința metoda variației constantei sau metoda lui Lagrange. În (17), soluția generală a ecuației omogene (16), înlocuim constanta C cu o funcție $C(x)$. Determinăm funcția $C(x)$ astfel încât

$$y = C(x) e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} \quad (18)$$

să fie soluție a ecuației neomogene (15).

Punînd condiția ca funcția (18) să verifice ecuația (15) obținem

$$C'(x) e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} + C(x) P(x) e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} = P(x) C(x) e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} + Q(x)$$

sau

$$C'(x) e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} = Q(x); \quad C'(x) = Q(x) e^{-\int_{x_0}^x P(t) dt} \quad (19)$$

Ecuația (19) este cu variabile separabile și soluția ei generală este

$$C(x) = K + \int_{x_0}^x Q(s) e^{\int_{x_0}^s P(t) dt} ds$$

unde K este constantă oarecare. Dacă înlocuim pe $C(x)$ astfel obținut în (18), avem soluția generală a ecuației neomogene (15)

$$y = \left[K + \int_{x_0}^x Q(s) e^{\int_{x_0}^s P(t) dt} ds \right] e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} \quad (20)$$

Această ultimă formulă mai poate fi scrisă sub forma următoare

$$y = K e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} + \int_{x_0}^x Q(s) e^{\int_s^x P(t) dt} ds \quad (21)$$

Dacă se pune problema aflării soluției care satisface condiția $y(x_0) = y_0$, atunci avem evident, $K = y_0$ și deci

$$y = y_0 e^{\int_{x_0}^x P(t) dt} + \int_{x_0}^x Q(s) e^{\int_s^x P(t) dt} ds \quad (22)$$

Această formulă individualizează complet soluția y cu ajutorul valorii ei în punctul x_0 .

Exemplu. Să se integreze ecuația $y' = y \operatorname{ctg} x + 2x \sin x$. Integrînd ecuația omogenă atașată; $y' = y \operatorname{ctg} x$ avem:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx; \quad \ln |y| = \ln |\sin x| + \ln |C| \rightarrow y = C \sin x.$$

În locul constantei C considerăm o funcție $C(x)$ și punem condiția ca funcția $y = C(x) \sin x$ să verifice ecuația dată:

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x = C(x) \sin x \operatorname{ctg} x + 2x \sin x;$$

$$C'(x) = 2x, \quad C(x) = x^2 + K$$

și deci soluția generală a ecuației va fi

$$y = (x^2 + K) \sin x = x^2 \sin x + K \sin x.$$

§ 6. ECUAȚII DIFERENȚIALE BERNOULLI

Sînt ecuații de forma

$$y' = P(x)y + Q(x)y^\alpha \quad (23)$$

unde P și Q sînt două funcții reale definite și continue pe un același interval I iar α este un număr real. Pentru $\alpha = 0$ ecuația (23) este o ecuație liniară și neomogenă, iar pentru $\alpha = 1$ este o ecuație cu variabile separabile. Vom presupune mai departe că $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq 1$.

Vom demonstra că dacă $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ este o soluție a ecuației diferențiale (23) a lui Bernoulli, strict pozitivă pe intervalul I , atunci funcția u definită prin

$$u(x) = (\varphi(x))^{1-\alpha}; \quad x \in I.$$

este soluție a unei ecuații diferențiale liniare.

Dacă ținem seama că φ este soluție a ecuației (23) avem

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-\alpha) (\varphi(x))^{-\alpha} \varphi'(x) = (1-\alpha) (\varphi(x))^{-\alpha} [P(x) \varphi(x) + \\ &+ Q(x) (\varphi(x))^\alpha] = (1-\alpha) [P(x) (\varphi(x))^{-\alpha+1} + Q(x)] = \\ &= (1-\alpha) [P(x) u(x) + Q(x)] \end{aligned}$$

Adică funcția u este soluție a ecuației liniare

$$u' = (1-\alpha) [P(x)u + Q(x)] \quad (24)$$

Reciproc, dacă u este o soluție strict pozitivă a ecuației liniare (24) atunci funcția φ definită prin

$$\varphi(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad x \in I$$

este soluție a ecuației diferențiale a lui Bernoulli. În adevăr, dacă ținem seama că u este soluție a ecuației (24) avem

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{1}{1-\alpha} (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}-1} u'(x) = \frac{1}{1-\alpha} (u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) [P(x)u(x) + \\ &+ Q(x)] = P(x) (u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}+1} + Q(x) (u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \\ &= P(x) (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} + Q(x) (u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Adică

$$\varphi'(x) = P(x) \varphi(x) + Q(x) (\varphi(x))^\alpha$$

și deci φ este soluție a ecuației (23). Prin urmare integrarea unei ecuații Bernoulli se reduce la integrarea unei ecuații liniare în urma schimbării de variabilă $u = y^{1-\alpha}$, unde u este noua funcție necunoscută.

Exemplu. Să se integreze ecuația: $y' = 2xy + x^3 \sqrt{y}$. În acest caz avem $\alpha = \frac{1}{2}$; facem schimbarea de variabilă $u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$. Atunci

$$u' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} y' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} (2xy + x^3 \sqrt{y}) = xy^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{2} = xu + \frac{x^3}{2};$$

adică

$$u' = xu + \frac{x^3}{2}.$$

Soluția generală a ecuației liniare în u este

$$u = C e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2 + 2}{2}$$

de unde rezultă soluția generală a ecuației date

$$y = \left(C e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2 + 2}{2} \right)^2$$

§ 7. ECUAȚII DIFERENȚIALE RICATTI

Sînt ecuații de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \quad (25)$$

unde P, Q și R sînt trei funcții reale, definite și continue pe un același interval I .

O ecuație Ricatti nu se integrează în general cu metode elementare, prin readucere la cuadraturi, așa cum s-a arătat pentru ecuațiile diferențiale tratate pînă acum.

În cazul în care se cunoaște o soluție y_1 a ecuației (25) vom arăta că integrarea sa se reduce la cuadraturi. Dacă φ este o soluție a ecuației Ricatti, diferă de y_1 , atunci funcția $u = \varphi - y_1$ este soluție a unei ecuații diferențiale Bernoulli. În adevăr, avem

$$u' = \varphi' - y_1'$$

și dacă ținem seama că φ și y_1 verifică ecuația (25), avem

$$\begin{aligned} u' &= \varphi' - y_1' = P(x)\varphi^2 + Q(x)\varphi + R(x) - (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) = \\ &= P(x)(\varphi^2 - y_1^2) + Q(x)(\varphi - y_1) = (P(x)(\varphi + y_1) + Q(x)) \cdot (\varphi - y_1) = \\ &= [P(x)(\varphi - y_1 + 2y_1) + Q(x)] \cdot (\varphi - y_1) = (Q(x) + 2y_1P(x))(\varphi - y_1) + \\ &\quad + P(x)(\varphi - y_1)^2 \end{aligned}$$

și dacă înlocuim pe $\varphi - y_1$ cu u , deducem că u verifică ecuația diferențială Bernoulli, cu $\alpha = 2$,

$$u' = (Q(x) + 2y_1 P(x))u + P(x)u^2 \quad (26)$$

Reciproc, dacă y_1 este o soluție a ecuației (25) și u este o soluție a ecuației (26), atunci funcția $\varphi = u + y_1$ este soluție a ecuației (25). În adevăr, avem

$$\begin{aligned} \varphi' = u' + y_1' &= Q(x)(\varphi - y_1) + 2y_1 P(x)(\varphi - y_1) + P(x)(\varphi - y_1)^2 + \\ &+ P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) = Q(x)\varphi - Q(x)y_1 + 2P(x)\varphi y_1 - \\ &- 2P(x)y_1^2 + P(x)\varphi^2 - 2P(x)\varphi y_1 + 2P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + \\ &+ R(x) = P(x)\varphi^2 + Q(x)\varphi + R(x) \end{aligned}$$

și deci φ este soluție a ecuației (18).

Deci, în cazul că se cunoaște o soluție a ecuației Riccati (25), integrarea sa se reduce la integrarea ecuației Bernoulli (26).

Se poate trece de la ecuația (25) la ecuația (26) făcând în ecuația Riccati schimbarea de variabilă

$$y = y_1 + u$$

unde u este noua funcție necunoscută.

Exemplu. Să se integreze ecuația Riccati

$$y' = -2xy^2 + y + \frac{x-1}{x^2}$$

știind că are soluție $y_1 = \frac{1}{x}$.

Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x} + u$ și obținem

$$u' = -3u - 2xu^2$$

care este o ecuație Bernoulli; $\alpha = 2$, cu soluția generală

$$u = \frac{1}{C e^{3x} - \frac{2(3x+1)}{9}}$$

și deci soluția generală a ecuației Riccati este

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{C e^{3x} - \frac{2(3x+1)}{9}}$$

Observație. Dacă în ecuația (25) facem schimbarea de variabilă $y = y_1 + \frac{1}{u}$, unde y_1 este o soluție a ecuației (25) iar u este noua funcție necunoscută, obținem o ecuație liniară în u .

§ 8. ECUAȚII CU DIFERENȚIALE TOTALE EXACTE

Să considerăm ecuația diferențială

$$y' = f(x, y); (x, y) \in D \text{ (domeniu)} \quad (27)$$

și să presupunem că

$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

În acest caz ecuația (27) se scrie

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0 \text{ sau } P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (28)$$

sau încă sub forma $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, unde funcțiile reale P și Q sînt definite și continue pe un același domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$.

Ecuația diferențială (28) se numește cu diferențiale totale exacte dacă primul ei membru este o diferențială totală exactă.

Deci în acest caz există o funcție $V(x, y): D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, V diferențiabilă astfel încît

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

și prin urmare avem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q \quad (29)$$

La ecuația (28) cu diferențiale totale exacte să atașăm ecuația

$$V(x, y) = C \quad (30)$$

unde C este o constantă arbitrară. Între soluțiile ecuației (28) și soluțiile ecuației (30) avem următoarea legătură.

Dacă φ este o soluție a ecuației cu diferențiale totale exacte (28), atunci $V(x, \varphi(x))$ este identic egală cu o constantă C_1 , adică φ este soluție a ecuației (30) pentru $C = C_1$.

În adevăr deoarece φ este soluție a ecuației (28) avem

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0 \quad (31)$$

Notăm $U(x) = V(x, \varphi(x))$

și derivînd avem

$$U'(x) = \frac{\partial V(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial V(x, \varphi(x))}{\partial y} \varphi'(x)$$

Deoarece ecuația (28) este o ecuație cu diferențiale totale exacte au loc egalitățile (29) și deci

$$U'(x) = P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x)$$

În baza egalității (31) avem deci $U'(x) = 0$ și prin urmare $U(x) = C_1$, adică φ este soluție a ecuației (30) pentru $C = C_1$.

Reciproc, dacă φ este soluție a ecuației (30), atunci ea este soluție a ecuației diferențiale (28). În adevăr, deoarece φ este soluție a ecuației (30), avem

$$V(x, \varphi(x)) = C$$

Derivând obținem identitatea

$$\frac{\partial V(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{V(x, \varphi(x))}{\partial y} \varphi'(x) = 0$$

și ținând cont de egalitățile (29) avem:

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x)) \varphi'(x) = 0$$

ceea ce înseamnă că φ este soluție a ecuației diferențiale (28).

În concluzie, am dovedit că soluția generală a ecuației cu diferențiale totale exacte (28), este dată (sub formă implicită) de ecuația

$$V(x, y) = C$$

Dacă presupunem că funcțiile P și Q admit derivate parțiale continue pe D și are loc egalitatea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\forall) \quad (x, y) \in D \quad (32)$$

atunci ecuația (28) este cu diferențiale totale exacte (vezi independența de drum a integralei curbilinii) iar funcția V este dată de egalitatea

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy, \quad (x_0, y_0) \in D; \quad (x, y) \in D$$

deci soluția generală a ecuației (28) va fi dată de

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy = C$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $(x + y + 1) dx + (x - y^2 + 3) dy = 0$

În acest caz $P = x + y + 1$; $Q = x - y^2 + 3$ și avem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, deci ecuația considerată este cu diferențiale totale exacte. Avem

$$V(x, y) = \int_{x_0}^x (x + y_0 + 1) dx + \int_{y_0}^y (x - y^2 + 3) dy$$

Putem alege $(x_0, y_0) = (0, 0)$ și deci

$$V(x, y) = \int_0^x (x + 1) dx + \int_0^y (x - y^2 + 3) dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

Soluția generală a ecuației este dată de

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$$

Factor integrant. Considerăm ecuația diferențială de ordinul întâi:

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (28)$$

unde P și Q sînt două funcții reale definite pe un același domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ și care admit derivate parțiale continue pe D . Dacă ecuația (28) nu este cu diferențiale totale exacte, adică

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

putem căuta o funcție μ astfel încît, înmulțind ecuația (28) cu μ să devină o ecuație cu diferențiale totale exacte.

Funcția μ pentru care ecuația

$$\mu(x, y) P(x, y) dx + \mu(x, y) Q(x, y) dy = 0$$

este o ecuație cu diferențiale totale exacte se numește factor integrant. Condiția pe care trebuie să o satisfacă factorul integrant este

$$\frac{\partial}{\partial y} (\mu P) = \frac{\partial}{\partial x} (\mu Q)$$

adică

$$P \frac{\partial \mu}{\partial y} - Q \frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mu \quad (33)$$

În general, problema găsirii unui factor integrant revine la rezolvarea ecuației cu derivate parțiale (33), care este o problemă mai dificilă decît integrarea ecuației (28). În anumite cazuri însă se poate determina ușor un factor integrant de formă specială. Dacă cerem ca ecuația (28) să admită un factor integrant care să depindă numai de x atunci ecuația (33) devine

$$-Q \frac{d\mu}{dx} = \mu \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \quad (34)$$

său

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx \quad (35)$$

Dacă funcția $\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ depinde numai de x , atunci ecuația (35) este cu variabile separabile și integrată ne dă

$$\ln |\mu| = \int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx + \ln |C|; \mu = C e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} dx}$$

Luînd $C=1$ obținem un factor integrant, suficient pentru a integra ecuația (28).

În mod asemănător se procedează și în cazul în care cerem ca ecuația să admită un factor integrant de forma

$$\mu(y); \mu(x \pm y); \mu(x^2 \pm y^2); \mu(xy); \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ etc.}$$

Exemplu. Fie dată ecuația diferențială

$$(x - y) dx + (x + y) dy = 0$$

Admite ecuația dată un factor integrant de forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$? În caz afirmativ să se integreze ecuația.

Funcția μ trebuie să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial}{\partial y} ((x - y)\mu(x^2 + y^2)) = \frac{\partial}{\partial x} ((x + y)\mu(x^2 + y^2))$$

Notăm $x^2 + y^2 = z$ și avem

$$-\mu(z) + (x - y) 2y \frac{d\mu}{dz} = \mu(z) + (x + y) 2x \frac{d\mu}{dz}$$

sau

$$-2(x^2 + y^2) \frac{d\mu}{dz} = 2\mu(z); \quad z \frac{d\mu}{dz} = -\mu(z)$$

Din ultima ecuație, cu variabile separabile, obținem

$$\mu(z) = \frac{C}{z};$$

Luăm $C = 1$ și avem, în acest caz $\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$

Înmulțim ecuația cu $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}$; avem

$$\frac{x dy + y dy}{x^2 + y^2} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

$$\frac{1}{2} d \ln(x^2 + y^2) + d \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 0$$

Integrând, obținem

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = -\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} + \ln |C|$$

de unde

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{-\operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}}$$

§ 9. ECUAȚII DE FORMA $F(x, y, y') = 0$

Până acum ne-am ocupat de ecuații sub forma normală

$$y' = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

adică rezolvate în raport cu y' .

În continuare ne vom ocupa de ecuații de ordinul întâi de forma

$$F(x, y, y') = 0 \quad (36)$$

nerezolvate în raport cu y' .

Pentru o ecuație de forma (36)

unde $F: I \times I_1 \times I_2 \rightarrow \mathbf{R}$ este o funcție cu derivate parțiale continue, o soluție este o funcție

$$\varphi: I \rightarrow I_1$$

derivabilă, cu $\varphi': I \rightarrow I_2$ și $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ pentru orice $x \in I$. Dacă se dă un punct (x_0, y_0, z_0) astfel încît

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

teorema funcțiilor implicite afirmă existența unei funcții f definită într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) cu derivate parțiale continue, astfel încît

$$F(x, y, f(x, y)) = 0; \quad f(x_0, y_0) = z_0$$

Dacă φ este o soluție a ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y)$$

definită de funcția f avem $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, deci

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = F(x, \varphi(x), f(x, \varphi(x))) = 0$$

și deci φ este soluție a ecuației date. Rezultă că putem reduce, cel puțin local, problema găsirii soluțiilor ecuației (36) cu $F'_z \neq 0$, la problema găsirii soluțiilor unei ecuații sub formă normală. Deoarece această cale presupune rezolvarea prealabilă a unei probleme de funcții implicite, ea nu este în general convenabilă în studiul diverselor ecuații particulare cînd există procedee mai simple pentru găsirea soluțiilor.

§ 10. ECUAȚII DE FORMA $F(x, y') = 0$ (37)

Dacă ecuația (37) poate fi rezolvată în raport cu x , atunci obținem

$$x = \varphi(y') \quad (38)$$

Să punem $y' = p$ și să luăm pe p variabilă independentă. Avem

$$\frac{dy}{dx} = y' \text{ sau } dy = p \, dx$$

Din ecuația (38) avem $x = \varphi(p)$, de unde $dx = \varphi'(p) \, dp$ și deci

$$dy = p\varphi'(p) \, dp$$

de unde obținem pe y printr-o cuadratură

$$y = \int p\varphi'(p) \, dp + C$$

și deci curbele integrale ale ecuației (38) sînt date parametric:

$$x = \varphi(p)$$

$$y = \int p\varphi'(p) \, dp + C$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $e^{y''} + y' - x = 0$

Avem $x = e^{y''} + y'$ și dacă $y' = p$ și luăm pe p ca variabilă independentă obținem

$$x = e^p + p$$

$$dy = p \, dx = p(e^p + 1) \, dp$$

de unde

$$y = \int p(e^p + 1) \, dp = e^p(p - 1) + \frac{p^2}{2} + C$$

Dacă ecuația (37) nu poate fi rezolvată (prin metode elementare) în funcție de x și dacă curba de ecuație $F(u, v) = 0$ se poate reprezenta parametric

$$u = \varphi(t); v = \psi(t); t \in I \text{ (interval)}$$

integrarea ecuației (37) se face printr-o cuadratură. În adevăr, dacă ψ continuă și φ are derivata continuă pe I , atunci avem

$$\frac{dy}{dx} = y'; \, dy = y' \, dx; \, dy = \psi(t)\varphi'(t) \, dt \text{ și deci}$$

$$y = \int \psi(t) \varphi'(t) \, dt + C$$

Curbele integrale ale ecuației (37) sînt date parametric;

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $(y')^3 + 3xy' - 2x^3 = 0$ Pentru a obține o reprezentare parametrică a curbei

$$u^3 - 2v^3 + 3uv = 0$$

luăm $u = t v$ și înlocuind în ecuație, avem

$$v = \frac{3t}{1 - 2t^3}; \quad u = \frac{3t^2}{1 - 2t^3}$$

În acest fel

$$x = \frac{3t}{2 - t^3}; \quad dy = \frac{3t^2}{2 - t^3} dx$$

Rezultă că

$$dx = \frac{6(1 + t^3) dt}{(2 - t^3)^2} \text{ și deci } dy = \frac{6(1 + t^3) 3t^2}{(2 - t^3)^3} dt$$

de unde

$$y = \int \frac{6(1 + t^3) 3t^2}{(2 - t^3)^3} dt = \frac{3(2t^3 - 1)}{(2 - t^3)^2} + C$$

Curbele integrale ale ecuației considerate sînt date parametric:

$$x = \frac{3t}{2 - t^3}; \quad y = \frac{3(2t^3 - 1)}{(2 - t^3)^2} + C$$

§ 11. ECUAȚII DE FORMA $F(y, y') = 0$ (39)

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică

$$u = \varphi(t); \quad v = \psi(t); \quad t \in I$$

a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$; integrarea ecuației (39) se reduce la o cuadratură. În adevăr, dacă funcțiile φ și ψ sînt continue iar φ are derivată continuă pe I , avem

$$y = \varphi(t), \quad y' = \psi(t)$$

$$\text{dar } y' = \frac{dy}{dx} \text{ de unde } dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt; \quad \psi(t) \neq 0 \text{ pe } I$$

Curbele integrale ale ecuației (39) sînt date parametric

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C; \quad y = \varphi(t)$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $y^2(y'^2 + 1) = a^2 y'^2$.
Curba $u^2(v^2 + 1) - a^2 v^2 = 0$, admite reprezentarea parametrică

$$u = a \sin t; v = \operatorname{tg} t$$

Avem

$$y = a \sin t; y' = \operatorname{tg} t; \text{ deci } dx = \frac{dy}{y'} = \frac{a \cos t}{\operatorname{tg} t} dt = \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt$$

$$x = \int \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + a \cos t + C$$

Prin urmare

$$x = a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t + C; y = a \sin t$$

Ecuația admite și soluția $y = 0$, care nu se obține din soluția generală. O astfel de soluție se numește singulară.

În cazul în care ecuația (39) se poate pune sub forma

$$y = \varphi(y')$$

luăm ca parametru pe $p = y'$ și deci $\frac{dy}{dx} = p; dx = \frac{dy}{p};$

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p} dp; x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C$$

Curbele integrale sînt date parametric:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C; y = \varphi(p)$$

§ 12. ECUAȚII LAGRANGE

Sînt ecuații de forma: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ (40)

în care membrul al doilea este o funcție liniară de x , cu coeficienții funcție de y' . Presupunem că funcțiile φ și ψ admit derivate continue pe un același interval I . Integrarea unei ecuații a lui Lagrange se reduce la integrarea unei ecuații liniare în modul următor:

În (40) înlocuim pe y' cu p ; ($y' = p$)

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

apoi derivăm în raport cu x și ținem seama că p este funcție de x .

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

În această ultimă ecuație înlocuim pe $\frac{dy}{dx}$ cu p și avem

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}; \text{ sau}$$

$$\frac{dp}{dx} [x\varphi'(p) + \psi'(p)] + \varphi(p) - p = 0 \quad (41)$$

Dacă considerăm pe p variabilă independentă și x necunoscută atunci ecuația (41) este o ecuație liniară de ordinul întâi în x .

$$(\varphi(p) - p) \frac{dx}{dp} + \varphi'(p)x + \psi'(p) = 0 \quad (42)$$

În cazul $\varphi(p) - p \neq 0$, ecuația (42) se mai poate pune sub forma

$$\frac{dx}{dp} = - \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}$$

a cărei soluție generală o notăm

$$x = g(p, c)$$

Dacă ținem seama de ecuația (40) obținem soluția generală a ecuației lui Lagrange sub formă parametrică

$$x = g(p, c); y = g(p, c) \varphi(p) + \psi(p) \quad (43)$$

În cazul în care p_0 este o rădăcină reală a ecuației

$$\varphi(p) = p$$

atunci ecuația (41) admite, evident, soluția $p = p_0$. Dacă înlocuim în (40) pe p prin p_0 , obținem

$$y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0) = p_0x + \psi(p_0)$$

care este soluție a ecuației (40). Ea nu este conținută în soluția generală (43), dată parametric. O astfel de soluție se numește singulară. În legătură cu comportarea curbelor integrale ale ecuației lui Lagrange față de dreapta reprezentată de ecuația

$$y = p_0x + \psi(p_0) \quad (44)$$

putem avea două situații

$$a) \text{ dacă } \lim_{p \rightarrow p_0} |x| = \lim_{p \rightarrow p_0} |g(p, x)| = \infty$$

atunci dreapta reprezentată de ecuația (44) este o direcție asimptotică a curbelor integrale date parametric de (43).

$$b) \text{ dacă } \lim_{p \rightarrow p_0} |x| = \lim_{p \rightarrow p_0} |g(p, c)|$$

atunci $y = p_0x + \psi(p_0)$ este o soluție (singulară) a ecuației (40)

Exemplu. Să se integreze ecuația $y = xy'^2 + y'^2$.
Dacă punem $y' = p$ avem $y = xp^2 + p^2$ și derivând în raport cu x , obținem

$$p = p^2 + 2xp \frac{dp}{dx} + 2p \frac{dp}{dx}; p(p-1) \frac{dx}{dp} + 2px + 2p = 0$$

Pentru $p = 0$, găsim soluția $y = 0$. Egalând cu zero al doilea factor, obținem

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p-1} - \frac{2}{p-1}$$

Integrând această ecuație obținem

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1$$

Din ecuația dată rezultă imediat y

$$y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2};$$

Deci soluția generală a ecuației considerate este dată parametric

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1; \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}$$

În cazul ecuației date avem $\psi(p) - p = p^2 - p$ care admite soluțiile reale $p = 0$ și $p = 1$.

Pentru $p = 0$, obținem soluția $y = 0$ care este o soluție singulară, deoarece $|x| \rightarrow C - 1$ pentru $p \rightarrow 0$. Pentru $p = 1$ obținem soluția $y = x + 1$. În acest caz $|x| \rightarrow \infty$ pentru $p \rightarrow 1$.

§ 13. ECUAȚII CLAIRAUT

Sînt de forma $y = xy' + \psi(y')$ (43)

Presupunem că ψ admite derivată continuă pe un interval I . După cum se vede o ecuație Clairaut este o ecuație Lagrange particulară, anume cînd $\varphi(p) = p$. Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru ecuația Lagrange. Înlocuim pe y' cu p :

$$y = xp + \psi(p)$$

apoi derivăm în raport cu x și ținem seama că p este funcție pe x :

$$p = p + x \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx} \text{ sau } [x + \psi'(p)] \frac{dp}{dx} = 0$$

Sînt două posibilități:

$$a) \frac{dp}{dx} = 0; \text{ deci } p = C \text{ de unde obținem, înlocuind în (45)}$$

$$y = Cx + \psi(C)$$

care este soluția generală a ecuației (45). Deci soluția generală a ecuației Clairaut reprezintă geometric o familie de drepte a cărei ecuație se obține înlocuind în ecuația diferențială (45) pe y' cu C .

b) $x + \psi'(p) = 0$; de unde $x = -\psi'(p)$ și dacă înlocuim în (45) obținem o curbă integrală a ecuației (45) reprezentată parametric:

$$x = -\psi'(p); y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

care este înfășurătoarea dreptelor de la punctul a).

Această ultimă soluție este singulară.

$$\text{Exemplu. Să se integreze } y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$$

Soluția generală este $y = xC + \sqrt{1 + C^2}$. Soluția singulară este dată parametric:

$$\begin{aligned} x = -\psi'(p) &= \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2}}; y = -p\psi'(p) + \psi(p) = \\ &= \frac{-p^2}{\sqrt{1 + p^2}} + \sqrt{1 + p^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \end{aligned}$$

de unde $x^2 + y^2 = 1$. Prin urmare, curbele integrale ale ecuației date sînt: cercul cu centrul în origine și de rază 1 și toate tangentele ce se pot duce la el.

§ 14. PROBLEMA TRAIECTORIILOR ÎN PLAN

Definiție. Fie (Γ) și (Γ') două familii de curbe definite într-un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ astfel încît prin fiecare punct al domeniului D trece cîte o curbă din fiecare familie și numai una. Spunem că familia de curbe (Γ') este izogonală familiei de curbe (Γ) în D , dacă în fiecare punct al domeniului D cele două curbe ale familiilor care trec prin acest punct se taie sub un unghi constant α .

În cazul $\alpha = \frac{\pi}{2}$ spunem că familiile de curbe (Γ) și (Γ') sînt ortogonale. Dacă familia de curbe (Γ) este dată, se pune problema să aflăm familia de curbe (Γ') izogonală familiei (Γ) . Presupunem că familia de curbe (Γ) , depinzînd de parametrul C , este dată de ecuația

$$F(x, y, C) = 0 \quad (46)$$

Ecuația diferențială a familiei de curbe (Γ) se obține eliminînd parametrul C între ecuația (46) și derivata ei în raport cu x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad (47)$$

Rezultatul este o ecuație diferențială de ordinul întâi

$$f(x, y, y') = 0, (x, y) \in D \quad (48)$$

O curbă γ a familiei (Γ) are în punctul curent (x, y) tangenta geometrică de coeficient unghiular y' definit de ecuația diferențială $f(x, y, y') = 0$. Fie (x_1, y_1) punctul curent al curbei γ' izogonală familiei Γ . În acest punct tangenta geometrică la curba γ' are coeficientul unghiular y'_1 . Dacă φ este unghiul pe care îl face tangenta la curba γ în punctul M cu semiaxa pozitivă Ox , iar φ' este unghiul pe care îl face tangenta la curba γ' în punctul M cu semiaxa pozitivă, atunci unghiul α al curbelor γ și γ' este $\alpha = \varphi' - \varphi$; și deci

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi}; & \frac{y'_1 - y'}{1 + y'_1 y'} &= k, \\ & & (k = \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned}$$

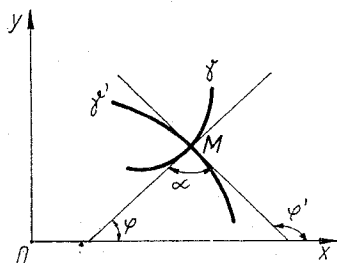


Fig. 98

de unde rezolvînd în raport cu y' obținem

$$y' = \frac{y'_1 - k}{1 + ky'_1}$$

Dacă înlocuim pe y' în ecuația diferențială a familiei de curbe obținem

$$f\left(x_1, y_1, \frac{y'_1 - k}{1 + ky'_1}\right) = 0$$

care este ecuația diferențială a familiei de curbe Γ' . Dacă înlocuim pe x_1 și y_1 prin x și y avem

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + ky'}\right) = 0 \quad (49)$$

În cazul traiectoriilor ortogonale avem $y'y'_1 = -1$ și deci ecuația diferențială a familiei de curbe Γ' este

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \quad (50)$$

Exemplu. Să se afle traiectorii izogonale ale familiei de drepte

$$y = Cx; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

În acest caz, $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Dacă derivăm în raport cu x în ecuația $y - Cx = 0$, obținem $y' = C$. Eliminăm pe C în ecuațiile $y - Cx = 0$; $y' = C$ și obținem ecuația diferențială a familiei de drepte

$$y = y'x$$

Apoi înlocuim pe y' cu $\frac{y'-1}{1+y'}$ și obținem ecuația diferențială a familiei de curbe izogonale:

$$y = x \frac{y'-1}{1+y'} \quad \text{sau} \quad y' = \frac{x+y}{x-y}$$

Integrând această ecuație obținem

$$\sqrt{x^2 + y^2} = k e^{\arctg \frac{y}{x}}$$

și deci traiectoriilor izogonale sînt spirale logaritmice.

PROBLEME

Să se integreze următoarele ecuații:

1. $5e^x \operatorname{tg} y \, dx + (1 - e^x) \sec^2 y \, dy = 0$ $R: y = \arctg C(1 - e^x)^5$

2. $\sec^2 x \operatorname{tg} y \, dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x \, dy = 0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ $R: \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$

3. $x(1 + y^6) \, dx + y^2(1 + x^4) \, dy = 0$; $y(0) = 1$

$R: 3 \arctg x^2 + 2 \arctg y^3 = \frac{\pi}{2}$

4. $y' = \sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{1 + \sin y}}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$; $R: \sqrt{2} \sin x + \sin y - \cos y = 0$

5. $y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$; $R: \operatorname{tg} \frac{y}{2} = C \left(1 + \operatorname{tg} \frac{y}{2}\right) \left(1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)$

6. $y' = \frac{y}{x} + \sin \frac{y}{x}$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$ $R: y = 2x \arctg x$

7. $(2x^2 + xy) y' = xy + y^2$ $R: y^2 = Cx e^{-\frac{y}{x}}$

8. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$; $y(1) = 2$; $R: \arctg \frac{y}{2x} = 2 \ln |x| + \frac{\pi}{4}$

9. $(x^4 + 6x^2y^2 + y^4) \, dx + 4xy(x^2 + y^2) \, dy = 0$ $y(1) = 0$

$R: x^5 + 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$

10. $(2x + y + 1) \, dx + (x + 2y - 1) \, dy = 0$

$R: x^2 + y^2 + xy + x - y = C$

11. $2(x + y) \, dy + (3x + 3y - 1) \, dx = 0$

$R: 3x + 2y - 4 + 2 \ln |x + y - 1| = C$

$$12. (x + y - 1) dx + (x + e^y) dy = 0 \quad R: e^y + \frac{1}{2} x^2 + xy - x = C.$$

$$13. (x + \sin y) dx + (x \cos y + \sin y) dy = 0:$$

$$R: \frac{1}{2} x^2 + x \sin y - \cos y = C.$$

$$14. (\ln y - 5 y^2 \sin 5x) dx + \left(\frac{x}{y} + 2y \cos 5x \right) dy = 0; y(0) = e$$

$$R: x \ln |y| + y^2 \cos 5x = e^2$$

$$15. (x \cos y - y \sin y) dy + (x \sin y + y \cos y) dx = 0$$

(se caută un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$)

$$R: e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = C$$

$$16. y dx - (x + y^2) dy = 0 \quad (\mu = \mu(y)) \quad R: x = y(C + y)$$

$$17. xy^2 dx + (x^2 y - x) dy = 0 \quad (\mu = \mu(xy)) \quad R: xy - \ln |y| = C$$

$$18. (2x^3 + 3x^2 y + y^2 - y^3) dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3) dy = 0$$

$$(\mu = \mu(x + y))$$

$$R: x^3 + xy + y^3 = C(x + y)$$

$$19. y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x; y(0) = 0; \quad R: y = -1 + \operatorname{tg} x + e^{-\operatorname{tg} x}$$

$$20. (1 + x^2)y' + y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; \quad R: y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 1 + C e^{-\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}$$

$$21. y' + \frac{2}{x} y = 3x^2 y^{\frac{4}{3}} \quad R: y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7} x^2$$

$$22. y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad R: y = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C \right) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$23. y' + \frac{3x^2}{x^3 + 1} y = y^2(x^3 + 1) \sin x; y(0) = 1. \quad R: y = \frac{\sec x}{1 + x^3}$$

$$24. y' + y^2 \sin x = 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x}; y_1 = \frac{1}{\cos x}; \quad R: y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3 \cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$$

$$25. x^2 y' + x^2 y^2 - 4xy + 4 = 0; y_1 = \frac{1}{x}; \quad R: y = \frac{4Cx^3 - 1}{Cx^4 - 1}$$

$$26. x = y' \sin y' + \cos y' \quad R: \begin{cases} x = p \sin p + \cos p \\ y = (p^2 - 2) \sin p + 2p \cos p + C \end{cases}$$

$$27. y = y'^2 \operatorname{tg} y' \quad R: \begin{cases} x = p \operatorname{tg} p - \ln |\cos p| + C \\ y = p^2 \operatorname{tg} p. \end{cases}$$

$$28. x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1) \quad R: \begin{cases} x = e^{2p}(2p^2 - 2p + 1) \\ y = e^{2p}(2p^3 - 3p^2 + 3p - 1,5) + C \end{cases}$$

$$29. y = y' \ln y' \quad R: \begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln^2 p + \ln p + C \\ y = p \ln p \end{cases}$$

$$30. y = xy' + y'(1 - y') \quad R: \text{Soluția generală este } y = Cx + C(1 - C) \text{ iar soluția singulară } y = p^2, \\ x = 2p - 1$$

$$31. y = xy' + 1 + y'^2 \quad R: \text{Soluția generală este } Y = Cx + 1 + C \text{ iar soluția singulară } x = -2p; y = 1 - p^2$$

Să se afle traiectoriile izogonale ale următoarelor familii de curbe.

$$32. y^2 = 4Cx; \alpha = \frac{\pi}{4} \quad R: \ln(y^2 + xy + 2x^2) + \frac{6}{7} \arctg \frac{2+x}{\sqrt{7}x} = k$$

$$33. x^2 = 2C(y - x\sqrt{3}); \alpha = \frac{\pi}{3} \quad R: xy - \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 + y^2) = k$$

$$34. 3x^2 + y^2 = Cx; \alpha = \frac{\pi}{2} \quad R: y^3 + k(x^2 - y^2) = 0.$$

CAPITOLUL XII

TEOREME DE EXISTENȚĂ

§ 1. TEOREMA DE EXISTENȚĂ PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNȚII

Considerăm ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

unde f este o funcție continuă pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Reamintim că problema lui Cauchy constă în a determina soluția ecuației (1) care satisface condiția

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Fie φ soluția problemei (1) + (2). Avem

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \quad (1')$$

$$\varphi(x_0) = y_0 \quad (2')$$

Condiția ca pentru $x = x_0$, funcția φ să ia valoarea y_0 se numește condiția inițială și este echivalentă cu următorul fapt geometric: graficul soluției $y = \varphi(x)$ trece prin punctul (x_0, y_0) . Pentru ecuațiile diferențiale de ordinul întâi de formă particulară considerate până acum, problema lui Cauchy admitea soluție.

Acest lucru rezulta, în anumite ipoteze, din chiar modul de construire a soluției. Pentru ecuații de forma generală (1) trebuie să demonstrăm existența soluției problemei lui Cauchy. Condiții suficiente de existență și unicitate a soluției problemei lui Cauchy sînt date în următoarea

Teorema 1.1. Fie dată ecuația diferențială de ordinul întâi

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

Presupunem

I) funcția f este continuă pe intervalul închis

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]; \quad a > 0; \quad b > 0$$

II) funcția f satisface pe I condiția lui Lipschitz în raport cu y : există un număr $N > 0$ astfel încît pentru orice două puncte $(x, y_1) \in I$ și $(x, y_2) \in I$ are loc inegalitatea

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

În aceste condiții există o soluție unică

$$\varphi: [x_0 - h, x_0 + h] \rightarrow \mathbf{R}$$

a ecuației (1), care satisface condiția

$$\varphi(x_0) = y_0$$

Demonstrație. Funcția f a fost presupusă continuă pe compactul I și deci va fi mărginită pe I . Există un număr $M > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x, y)| \leq M, (\forall) (x, y) \in I \quad (3)$$

Pentru h din enunțul teoremei luăm

$$h = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Rezolvarea problemei (1) + (2) este echivalentă cu rezolvarea următoarei ecuații integrale

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y) dx; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (4)$$

unde y este funcția necunoscută. În adevăr, prin integrare din (1') și (2') obținem

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx$$

Prin urmare, orice soluție a problemei (1) + (2) este soluție a ecuației integralei (4). Reciproc, derivînd ambii membri ai ecuației (4), obținem

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

și observînd că $\varphi(x_0) = y_0$, deducem că orice soluție continuă a ecuației integrale (4) este soluție a problemei (1) + (2). Pentru aflarea soluției φ a ecuației (4) vom folosi metoda aproximațiilor succesive. Această metodă constă în a construi un șir de funcții

$$y_0, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

șir uniform convergent pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$, către o funcție $\varphi(x)$, funcție care îndeplinește condițiile din enunțul teoremei. Primul termen al șirului îl luăm egal cu y_0 și se numește aproximația de ordinul zero. Al doilea termen al șirului, numit și aproximația de ordinul întâi, îl definim prin egalitatea

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \quad (5)$$

Al treilea termen al șirului, numit și aproximația de ordinul doi, îl definim prin egalitatea

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx$$

În general definim $y_n(x)$, aproximația de ordinul n , prin egalitatea

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx \quad (6)$$

Am construit în acest fel un șir de funcții

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots \quad (7)$$

Pentru a demonstra existența soluției φ a ecuației (4) parcurgem trei etape

1) Demonstrăm că funcțiile șirului (1) sînt definite și continue pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ și au graficele conținute în I . Pentru aceasta folosim metoda inducției matematice. Pentru $n = 1$, din formula (1) rezultă că funcția y_1 este definită și continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ deoarece funcția $f(x, y_0)$ este definită și continuă pe acest interval. Pentru a arăta că funcția y_1 are graficul conținut în I trebuie dovedit că

$$|y_1(x) - y_0| \leq b$$

Avem, ținînd cont de inegalitatea (3),

$$|y_1(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_0)| dx \right| \leq M |x - x_0| \quad (8)$$

Din modul cum a fost ales h deducem

$$|y_1(x) - y_0| \leq b$$

Deci funcția y_1 este definită și continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ și are graficul conținut în D (fig. 99).

Presupunem că funcția y_{n-1} este definită și continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ și are graficul conținut în I și să arătăm că funcția y_n are aceleași proprietăți.

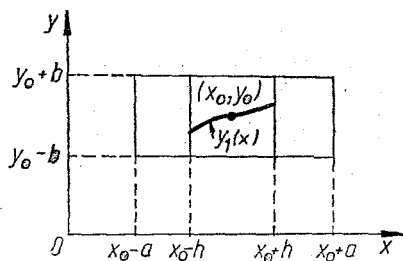


Fig. 99.

Pentru aceasta folosim formula (6). Funcția y_{n-1} a fost presupusă definită și continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$, cu graficul conținut în I , deci și funcția $f(x, y_{n-1}(x))$ va fi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ deoarece este o compunere de funcții continue. Din formula (6) rezultă că funcția y_n este definită și continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$. Din inegalitatea

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_{n-1}(x))| dx \right| \leq M|x_0 - x| \leq Mh \leq b \quad (8')$$

deducem că funcția y_n are graficul conținut în I .

2) Demonstrăm că șirul de funcții (7) este uniform convergent pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ către o funcție φ , continuă și ea pe același interval.

Dar convergența uniformă a șirului de funcții (7) este echivalentă cu convergența uniformă a următoarei serii de funcții:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \dots + (y_n - y_{n-1}) + \dots + \quad (9)$$

deoarece șirul sumelor parțiale ale seriei (9) coincide cu șirul (7). Pentru a arăta că seria de funcții (9) converge uniform pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ este suficient să arătăm că ea este majorată de o serie numerică de termeni pozitivi și convergentă. Pentru cel de-al doilea termen al seriei (9) avem, folosind inegalitatea (8),

$$|y_1(x) - y_0| \leq M|x - x_0|, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Pentru cel de-al treilea termen al seriei (9) avem

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x [f(x, y_1) - f(x, y_0)] dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_1(x)) - f(x, y_0)| dx \right| \end{aligned}$$

și dacă folosim condiția lui Lipschitz și (8), obținem

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &\leq N \left| \int_{x_0}^x |y_1(x) - y_0| dx \right| \leq M \cdot N \left| \int_{x_0}^x |x - x_0| dx \right| = \\ &= MN \frac{|x - x_0|^2}{2}, \quad (\forall) x \in [x_0 - h, x_0 + h] \end{aligned}$$

În general, presupunem că are loc inegalitatea

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq MN^{n-1} \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (10)$$

și să arătăm că

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq MN^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Folosind condiția lui Lipschitz și inegalitatea (10) obținem

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq N \left| \int_{x_0}^x |y_n(x) - y_{n-1}(x)| dx \right| \leq \\ \leq MN^n \left| \int_{x_0}^x \frac{|x - x_0|^n}{n!} dx \right| = MN^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Deci inegalitatea (10) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $|x - x_0| \leq h$, din inegalitatea (10) obținem

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq MN^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!}; \quad (\forall) x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Am arătat că seria de funcții (9) este majorată de o serie numerică având termenul general u_n dat de egalitatea

$$u_n = MN^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!} > 0 \quad (11)$$

Seria de termen general u_n este convergentă. În adevăr, dacă aplicăm criteriul raportului obținem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{MN^n h^{n+1} n!}{MN^{n-1} h^n (n+1)!} = \frac{Nh}{n+1} \rightarrow 0 \quad \text{pentru } n \rightarrow \infty$$

Criteriul lui Weierstrass ne garantează convergența uniformă a seriei (9), de unde rezultă convergența uniformă a șirului (6), pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Notăm cu φ funcția limită a șirului (6):

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x); \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Folosind un rezultat stabilit la șirurile de funcții, deducem că funcția limită φ este continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$.

3) Demonstrăm că funcția limită φ are graficul conținut în I și că este soluție a ecuației integrale (4). Prima afirmație rezultă imediat dacă trecem la limită în inegalitatea (8'):

$$|\varphi(x) - y_0| \leq b$$

Arătăm acum că funcția φ verifică ecuația (4). Pentru aceasta trebuie să dovedim că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx = \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (12)$$

În adevăr, folosind condiția lui Lipschitz, avem

$$\left| \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx \right| \leq \\ \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_n(x)) - f(x, \varphi(x))| dx \right| \leq N \left| \int_{x_0}^x |y_n(x) - \varphi(x)| dx \right|$$

Dar șirul de funcții (7) converge uniform pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ către funcția φ și deci:

($\forall$) $\varepsilon > 0$; ($\exists$) $N(\varepsilon)$ astfel încît ($\forall$) $n > N(\varepsilon)$ avem

$$|y_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon; \quad (\forall) \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Dacă în inegalitatea precedentă considerăm $n > N(\varepsilon)$, avem

$$\left| \int_{x_0}^x f(x, y_n(x)) dx - \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx \right| \leq N\varepsilon |x - x_0| \leq N\varepsilon h = \varepsilon'$$

Această ultimă inegalitate ne arată că formula (12) este adevărată. Trecînd la limită în (6), obținem

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \varphi(x)) dx; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

adică funcția φ verifică ecuația integrală (4).

În acest mod, existența soluției φ a fost dovedită. Rămîne să mai demonstrăm că această soluție este unică. Presupunem că ecuația (4) admite și soluția ψ , adică

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, \psi(x)) dx; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (13)$$

Din (13) avem

$$|\psi(x) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, \psi(x))| dx \right| \leq M |x - x_0|, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Folosind condiția lui Lipschitz și formula (6), obținem

$$|y_1(x) - \psi(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_0) - f(x, \psi(x))| dx \right| \leq \\ \leq N \cdot \left| \int_{x_0}^x |y_0 - \psi(x)| dx \right| \leq NM \frac{|x - x_0|^2}{2!}$$

Arătăm prin inducție că are loc inegalitatea

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leq MN^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}; \quad (\forall) \quad n \in \mathbb{N} \text{ și} \\ (\forall) \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (14)$$

Pentru $n = 1$ inegalitatea a fost dovedită mai sus. Presupunem inegalitatea (14) adevărată pentru n și să arătăm că este adevărată și pentru $n + 1$. Procedînd ca mai înainte, avem

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - \psi(x)| &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(x, y_n(x)) - f(x, \psi(x))| dx \right| \leq \\ &\leq N \left| \int_{x_0}^x |y_n(x) - \psi(x)| dx \right| \leq \frac{MN^{n+1}}{(n+1)!} \left| \int_{x_0}^x |x - x_0|^{n+1} dx \right| = \\ &= \frac{MN^{n+1}}{(n+2)!} |x - x_0|^{n+2}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \end{aligned}$$

deci inegalitatea (14) este adevărată, de unde deducem

$$|y_n(x) - \psi(x)| \leq MN^n \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (15)$$

Am dovedit că seria de termeni generali u_n este convergentă și deci $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Cu această ultimă observație, dacă trecem la limită în inegalitatea (15) avem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n(x) - \psi(x)| = 0; (\forall) \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \text{ adică}$$

$$\varphi(x) = \psi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$$

Funcția φ satisface toate condițiile din enunțul teoremei.

Observație. Dacă funcția f este derivabilă în raport cu $y \in I$ și dacă f'_y este continuă pe I , atunci f satisface condiția lui Lipschitz pe I , în raport cu y .

În adevăr, dacă f'_y este continuă pe intervalul compact

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

din proprietățile funcțiilor continue pe un compact deducem:

$$\sup |f'_y(x, y)| \leq N, \quad (x, y) \in I$$

Pentru orice două puncte $(x, y_1) \in I$ și $(x, y_2) \in I$, aplicăm formula de medie a lui Lagrange și avem

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |(y_1 - y_2) f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1))|; \quad 0 < \theta < 1$$

și deci

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

Exemplu.

Pentru o ecuație diferențială de forma

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

care nu intră în nici unul din tipurile prezentate mai înainte putem folosi metoda aproximațiilor succesive pentru integrarea sa aproximativă. Dăm

în acest sens un exemplu. Să se determine soluția ecuației Ricatti pentru care nu cunoaștem o soluție particulară,

$$y' = x^2 + y^2; y(0) = 0; (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$$

În acest caz funcția $f(x, y) = x^2 + y^2$ satisface toate condițiile din teorema de existență cu $M = 2$, deci

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{1}{2} \text{ atunci } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Aproximația de ordinul zero este $y_0 = 0$. Aproximația de ordinul întâi este

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_0) dx = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3}$$

Aproximația de ordinul doi este

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_1) dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9}$$

Aproximația de ordinul trei este

$$\begin{aligned} y_3(x) &= y_0 + \int_0^x f(x, y_2) dx = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} \right)^2 \right] dx = \\ &= \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{3^2} + 2 \frac{x^{10}}{3 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{x^{14}}{(7 \cdot 9)^2} \right) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} + 2 \frac{x^{11}}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{x^{15}}{(7 \cdot 9)^2 \cdot 15} \end{aligned}$$

Procedeeul continuă în funcție de problema care a condus la ecuația diferențială considerată.

§ 2. SOLUȚIA GENERALĂ A UNEI ECUAȚII DIFERENȚIALE

Teorema de existență pe care am demonstrat-o are un caracter local. Existența și unicitatea soluției φ este dovedită pe un interval $[x_0 - h, x_0 + h]$, care conține punctul x_0 . Se pune în mod firesc problema prelungirii acestei soluții pe un interval cât mai mare. Pentru a preciza mai bine despre ce este vorba, dăm următoarea

Definiție 1.2. Fie $\varphi: I_1 \rightarrow \mathbf{R}$ și $\psi: I_2 \rightarrow \mathbf{R}$ două soluții ale ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D; D \text{ domeniu din } \mathbf{R}^2 \quad (1)$$

Spunem că soluția ψ prelungește soluția φ și se scrie $\varphi < \psi$ dacă $I_1 \subset I_2$ și dacă restricția lui ψ la I_1 coincide cu φ . Presupunem că f este local lipschit-

ziană pe domeniul D , adică pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D$ și orice vecinătate compactă V a lui (x_0, y_0) conținută în D , funcția f satisface condiția lui Lipschitz pe V . În aceste condiții soluția $\varphi: [x_0 - h, x_0 + h] \rightarrow \mathbf{R}$ admite

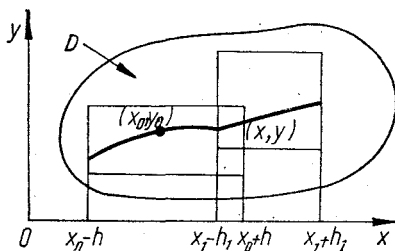


Fig. 100.

o prelungire. În adevăr fie $x_1 = x_0 + h$ și $y_1 = \varphi(x_0 + h)$. Din condiția că D este un domeniu, rezultă că putem găsi o vecinătate compactă V a punctului (x_1, y_1) cu $V \subset D$. Este evident că V poate fi aleasă un interval bidimensional

$$I_1 = [x_1 - a_1, x_1 + a_1] \times [y_1 - b_1, y_1 + b_1]$$

Există un număr $M_1 > 0$ astfel încât

$$|f(x, y)| \leq M_1; \quad (\forall) (x, y) \in I_1$$

și în plus, funcția f satisface condiția lui Lipschitz pe I_1 . Vom lua ca date inițiale pe x_1 și y_1 . Pe baza teoremei de existență putem afirma că soluția φ_1 a ecuației diferențiale (1) există și este unică pe intervalul $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$:

$$h_1 = \min \left(a_1, \frac{b_1}{M_1} \right)$$

Din modul cum a fost construit intervalul $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$ mijlocul său coincide cu extremitatea dreaptă a intervalului $[x_0 - h, x_0 + h]$. În punctul $x_0 + h$ soluțiile φ și φ_1 iau aceeași valoare y_1 . Pe baza unicității, soluțiile φ și φ_1 coincid pe intervalul $[x_1 - h_1, x_0 + h]$. Este evident că funcția ψ definită prin

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{dacă } x \in [x_0 - h, x_0 + h] \\ \varphi_1(x) & \text{dacă } x \in [x_0 + h, x_1 + h_1] \end{cases}$$

este soluție a ecuației (1) și în plus $\varphi < \psi$, adică ψ prelungește pe φ .

Definiția 2.2. O soluție φ a ecuației (1) se numește maximală dacă din $\varphi < \psi$ rezultă $\varphi = \psi$.

Pentru soluția maximală care în punctul x_0 ia valoarea y_0 folosim notația

$$y(x) = \varphi(x, x_0, y_0)$$

Definiția 3.2. Fie dată ecuația diferențială

$$y' = f(x, y), (x, y) \in D, D \text{ domeniu din } \mathbf{R}^2 \quad (1)$$

și presupunem funcția f continuă și local lipschitziană pe D . Prin soluția generală a ecuației diferențiale (1) înțelegem familia tuturor soluțiilor maxime

$$y(x) = \varphi(x, x_0, y_0); (x_0, y_0) \in D$$

Cum fiecărui punct $(x_0, y_0) \in D$ îi corespunde o singură soluție

$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

dacă luăm pe y_0 ca parametru (pe x_0 îl fixăm), obținem soluția generală sub forma

$$y = f(x, C).$$

Observație. O ecuație diferențială de forma

$$F(x, y, y') = 0$$

poate să aibă mai multe soluții generale. De exemplu ecuația

$$y'^2 = f(x)$$

unde f continuă și $f \geq 0$ pe I , are două soluții generale

$$y = \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx + C_1 \quad \text{și} \quad y = - \int_{x_0}^x \sqrt{f(x)} dx + C_2$$

§ 3. TEOREMA DE EXISTENȚĂ PENTRU SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi, sub formă normală, se scrie astfel

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (16)$$

unde variabila independentă este x iar funcțiile necunoscute sînt

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Funcțiile reale $f_1, f_2, \dots, f_n$ de argumente $x, y_1, \dots, y_n$ sînt definite și continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Spunem că funcțiile reale

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x) \quad (17)$$

definite pe un același interval I , este o soluție a sistemului (16) dacă

a) funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sînt derivabile pe I .

$$b) \{(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)); x \in I\} \subset D$$

$$c) \varphi'_i(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x));$$

$$i = 1, 2, \dots, n; (\forall) x \in I$$

În sistemul de axe $Ox, Oy_1, Oy_2, \dots, Oy_n$, curba reprezentată de ecuațiile (17) se numește *curbă integrală* a sistemului (16).

Observație. Pot fi considerate sisteme de ecuații diferențiale sub formă normală în care să intervină derivatele de ordin superior ale funcțiilor necunoscute $y_1, \dots, y_n$. Prin introducerea de noi funcții necunoscute un asemenea sistem se poate reduce la un sistem de ordinul întâi. Vom arăta aceasta pe un caz particular. Fie sistemul

$$\begin{aligned} y'' &= f_1(x, y, z, y', z') \\ z'' &= f_2(x, y, z, y', z') \end{aligned} \quad (18)$$

Dacă notăm $y = y_1; y'_1 = y_2; z = y_3; y'_3 = y_4$ observăm că funcțiile y_1, y_2, y_3, y_4 verifică sistemul

$$\begin{aligned} y'_1 &= y_2 \\ y'_2 &= f_1(x, y_1, y_3, y_2, y_4) \\ y'_3 &= y_4 \\ y'_4 &= f_2(x, y_1, y_3, y_2, y_4) \end{aligned} \quad (19)$$

Invers dacă y_1, y_2, y_3, y_4 este o soluție a sistemului (19), atunci dacă notăm

$$y_1 = y \text{ și } y_3 = z$$

se vede că funcțiile y și z sînt de două ori derivabile și că ele verifică sistemul (18).

Fie dat sistemul de ecuații diferențiale (16). *Problema lui Cauchy* este următoarea:

Să se determine soluția sistemului (16) care să satisfacă la condițiile

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \quad (20)$$

unde $x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ sînt numere date. Condițiile (20) se numesc condiții inițiale sau condițiile lui Cauchy.

Teorema 1.3. Fie dat sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (16)$$

Presupunem

I) funcțiile $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ continue pe intervalul închis

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_{10} - b_1, y_{10} + b_1] \times \dots \times [y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n];$$

$$a > 0; b > 0;$$

II) funcțiile $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ satisfac pe I condiția lui Lipschitz în raport cu $y_1, y_2, \dots, y_n$: există n numere pozitive $N_1, N_2, \dots, N_n$ astfel încît pentru orice două puncte

$$(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in I \text{ și } (x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \in I$$

are loc inegalitatea

$$|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - f_i(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n)| \leq \\ \leq N_1 |y_1 - Y_1| + N_2 |y_2 - Y_2| + \dots + N_n |y_n - Y_n|$$

pentru $i = 1, 2, \dots, n$. În aceste condiții există o soluție unică

$$(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n); \varphi_i: [x_0 - h, x_0 + h] \rightarrow \mathbf{R};$$

$i = 1, \dots, n$, a sistemului (16) care satisface condițiile:

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \varphi_2(x_0) = y_{20}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0} \quad (20)$$

Existența soluției sistemului (16), care verifică condițiile (20), se face tot prin metoda aproximărilor succesive. Funcțiile $f_i (i = 1, \dots, n)$ fiind continue pe intervalul compact I , sînt mărginite, $(\exists) M_i$ astfel încît $|f_i(x, y_1, \dots, y_n)| \leq M_i (\forall) (x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in I$.

Pentru h din enunțul teoremei luăm

$$h = \min \left(a, \frac{b_1}{M_1}, \frac{b_2}{M_2}, \dots, \frac{b_n}{M_n} \right)$$

Rezolvarea problemei (16) + (20) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuații integrale

$$y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^x f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx \\ y_2(x) = y_{20} + \int_{x_0}^x f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx, x \in [x_0 - h, x_0 + h] \quad (21) \\ \vdots \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) dx$$

Se iau ca aproximații de ordinul zero, numerele $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$. Aproximațiile de ordinul întâi le definim prin egalitățile

$$y_{11}(x) = y_{10} + \int_{x_0}^x f_1(x, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) dx \\ y_{21}(x) = y_{20} + \int_{x_0}^x f_2(x, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) dx \quad (22) \\ \dots \dots \dots \\ y_{n1}(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n(x, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) dx$$

Funcțiile $y_{11}, \dots, y_{n1}$ sînt continue pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ și se demonstrează că punctul $(x, y_{11}(x), \dots, y_{n1}(x))$ aparține lui I . În general, aproximațiile de ordinul k se definesc prin egalitățile

$$\begin{aligned} y_{1k}(x) &= y_{10} + \int_{x_0}^x f_1(x, y_{1k-1}(x), \dots, y_{nk-1}(x)) dx \\ y_{2k}(x) &= y_{20} + \int_{x_0}^x f_2(x, y_{1k-1}(x), \dots, y_{nk-1}(x)) dx \\ &\dots\dots\dots \\ y_{nk}(x) &= y_{n0} + \int_{x_0}^x f_n(x, y_{1k-1}(x), \dots, y_{nk-1}(x)) dx \end{aligned} \quad (23)$$

Funcțiile $y_{1k}, y_{2k}, \dots, y_{nk}$ sînt continue pe $[x_0 - h, x_0 + h]$, iar punctul $(x, y_{1k}(x), y_{2k}(x), \dots, y_{nk}(x))$ aparține lui I .

În acest mod se obțin șirurile de funcții

$$(y_{1k}(x)); (y_{2k}(x)); \dots; (y_{nk}(x))$$

Se demonstrează că în teorema de existență pentru ecuații diferențiale de ordinul întâi, că aceste șiruri sînt uniform convergente pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ și dacă punem

$$\varphi_1(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{1k}(x), \dots, \varphi_n(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{nk}(x)$$

funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formează o soluție a sistemului (21) și deci a problemei (16) + (20). Soluția obținută este unică.

Definiție. Fie $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n): I_1 \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$;

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n): I_2 \subset \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$$

două soluții ale sistemului (16). Spunem că soluția ψ prelungește soluția φ și se scrie $\varphi < \psi$, dacă $I_1 \subset I_2$ și dacă restricția lui ψ la I_1 coincide cu φ .

O soluție φ a sistemului (16) se numește maximală dacă din $\varphi < \psi$ rezultă $\varphi = \psi$.

Pentru soluția maximală care în punctul x_0 ia valoarea

$$(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$$

folosim notația

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(x, x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \\ y_2 &= \varphi_2(x, x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(x, x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \end{aligned} \quad (24)$$

Definiția 1.3. Fie dat sistemul de ecuații diferențiale (16) unde funcțiile $f_i (i = 1, \dots, n)$ sînt continue și local lipschitziene pe domeniul $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Prin soluția generală a sistemului (16) înțelegem familia tuturor soluțiilor maxime (24).

Cum fiecărui punct $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in D$ îi corespunde o singură soluție de forma (24), dacă luăm pe $y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}$ ca parametri, obținem soluția generală sub forma

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y_2 &= g_2(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= g_n(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned} \quad (25)$$

§ 4. TEOREMA DE EXISTENȚĂ PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n

Fie dată o ecuație diferențială de ordinul n de forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (26)$$

Prin introducerea de noi funcții necunoscute, o ecuație de forma (26) se poate reduce la un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi. În adevăr, dacă notăm

$$y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$$

și ținem seama de ecuația (26), obținem sistemul

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (27)$$

Din modul cum a fost obținut sistemul (27) se vede imediat că dacă y este o soluție a ecuației (26), atunci $y_1, y_2, \dots, y_n$ este o soluție a sistemului (27) și reciproc dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ este o soluție a sistemului (27) atunci y_1 este o soluție a ecuației (26). Rezultă de aici că studiul ecuațiilor diferențiale de ordinul n se reduce la studiul sistemelor de ecuații diferențiale de ordinul întâi. Dacă ținem seama de acest ultim rezultat putem enunța următoarea

Teorema 1.4. Fie dată ecuația diferențială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (28)$$

Presupunem

I) funcția f continuă pe intervalul închis

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b_0, y_0 + b_0] \times [y'_0 - b_1, y'_0 + b_1] \times \\ \times [y_0^{(n-1)} - b_{n-1}, y_0^{(n-1)} + b_{n-1}]$$

II) funcția f satisface pe I condiția lui Lipschitz în raport cu $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$; există n numere pozitive $N_0, N_1, N_2, \dots, N_{n-1}$ astfel încît pentru orice două puncte

$$(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in I \text{ și } (x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)}) \in I$$

are loc inegalitatea

$$|f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) - f(x, Y, Y', \dots, Y^{(n-1)})| \leq \\ \leq N_0 |y - Y| + N_1 |y' - Y'| + \dots + N_{n-1} |y^{(n-1)} - Y^{(n-1)}|$$

În aceste condiții există o soluție unică

$$\varphi: [x_0 - h, x_0 + h] \rightarrow \mathbf{R}$$

a ecuației (26) care satisface soluțiile

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Din această teoremă rezultă că soluția generală a ecuației (26) poate fi pusă sub forma

$$y = g(x, C_1, C_2, \dots, C_n).$$

§ 5. METODA RUNGE-KUTTA

Este una din metodele cel mai des folosite pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

Fie dată ecuația diferențială de ordinul întâi

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

unde $(x, y) \in I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ și presupunem că funcția f are derivate parțiale de ordinul patru continue pe I . Condițiile din teorema de existență și unicitate pentru ecuațiile diferențiale de ordinul întâi sînt în acest caz îndeplinite și deci ecuația (1) are o soluție unică care satisface condiția

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Această soluție este definită pe un interval de forma $[x_0 - h, x_0 + h]$. Din formula lui Taylor, pentru $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, avem

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''(x_0) + \\ + \frac{(x - x_0)^4}{4!} y^{(4)}(x_0 + \theta(x - x_0)); \theta \in (0, 1) \quad (29)$$

Dacă ținem seama că $y(x)$ este soluție a ecuației (1) atunci coeficienții $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ din formula (29) se calculează cu ajutorul funcției f .
Avem

$$\begin{aligned} y' &= f; \quad y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'; \quad y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' \\ y^{(4)} &= \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 + \\ &\quad + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' \end{aligned} \quad (30)$$

Dacă înlocuim pe x cu x_0 și pe y cu $y_0 = y(x_0)$ obținem coeficienții $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$. După cum se vede calculul acestor coeficienți este în general complicat. Din această cauză prezintă un interes deosebit următorul procedeu de integrare numerică a ecuației diferențiale (1) cu condiția (2), numit procedeul Runge-Kutta.

În punctul $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, valoarea aproximativă $\tilde{y}(x)$ a soluției $y(x)$ este dată de formula

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{6} k(x) \quad (31)$$

unde $k(x) = k_1(x) + 4k_2(x) + k_4(x)$

și $k_1(x) = f(x_0, y_0)$; $k_2(x) = f\left(x_0 + \frac{x - x_0}{2}, y_0 + \frac{x - x_0}{2} k_1(x)\right)$

$$k_3(x) = f(x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - x_0) k_1(x));$$

$$k_4(x) = f(x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - x_0) k_3(x))$$

Legătura dintre $y(x)$, soluția exactă a problemei (1) + (2) și soluția aproximativă $\tilde{y}(x)$, dată de formula (31), este dată de următoarea

Teorema 1.5. Primii patru termeni din dezvoltarea lui $\tilde{y}(x)$ după puterile lui $x - x_0$ coincid cu primii patru termeni din formula (29) a lui Taylor.

Demonstrație. Primii patru termeni din dezvoltarea lui $\tilde{y}(x)$ după puterile lui $x - x_0$ se obțin dezvoltând pe $k(x)$ cu ajutorul formulei lui Taylor și mărginindu-ne la primii trei termeni.

Avem

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) &= y(x_0) + \frac{x - x_0}{6} \left[k(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} k'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} k''(x_0) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x - x_0)^3}{3!} k'''(x_0 + \theta_1(x - x_0)) \right], \quad \theta_1 \in (0, 1) \end{aligned} \quad (32)$$

Deoarece $k_1(x)$ este constant și egal cu $f(x_0, y_0)$, avem

$$k'(x_0) = 4k'_2(x_0) + k'_4(x_0)$$

$$k''(x_0) = 4k''_2(x_0) + k''_4(x_0)$$

$$k'''(x_0) = 4k'''_2(x_0) + k'''_4(x_0)$$

iar

$$k'_2(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} \left[x_0 + \frac{x - x_0}{2}, y_0 + \frac{x - x_0}{2} k_1(x) \right] + \\ + \frac{k_1(x)}{2} \frac{\partial f}{\partial y} \left[x_0 + \frac{x - x_0}{2}, y_0 + \frac{x - x_0}{2} k_1(x) \right]$$

$$k'_3(x) = \frac{\partial f}{\partial x} [x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - y_0) k_1(x)] + \\ + k_1(x) \frac{\partial f}{\partial y} [x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - x_0) k_1(x)]$$

$$k'_4(x) = \frac{\partial f}{\partial x} [x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - x_0) k_3(x)] + \\ + [k_3(x) + (x - x_0) k'_3(x)] \frac{\partial f}{\partial y} [x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - x_0) k_3(x)]$$

pentru $x = x_0$ și $y_0 = y(x_0)$, obținem

$$k'_2(x_0) = \frac{1}{2} y''(x_0)$$

$$k'_3(x_0) = k'_4(x_0) = y''(x_0)$$

și

$$k'(x_0) = 3y''(x_0)$$

Pentru derivatele de ordinul doi, avem

$$k''_2(x) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left[x_0 + \frac{x - x_0}{2}, y_0 + \frac{x - x_0}{2} k_1(x) \right] + \right. \\ \left. + 2k_1(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} () + k_1^2(x) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} () \right\}$$

$$k''_4(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} [x_0 + (x - x_0), y_0 + (x - x_0) k_3(x)] + 2[k_3(x) + \\ + (x - x_0) k'_3(x)] \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} () + [k_3(x) + (x - x_0) k'_3(x)]^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} () + \\ + [2k'_3(x) + (x - x_0) k''_3(x)] \frac{\partial f}{\partial y} ()$$

pentru $x = x_0$ și $y_0 = y(x_0)$, obținem

$$k_2''(x_0) = \frac{1}{4} \left[y''''(x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y''(x_0) \right]$$

$$k_4''(x_0) = y''''(x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) y''(x_0)$$

și deci

$$k'''(x_0) = 2y''''(x_0)$$

Dacă revenim la formula (32) și ținem seama de calculele făcute obținem

$$\begin{aligned} \tilde{y}(x) = & y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \\ & + \frac{(x - x_0)^3}{3!} \cdot y'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{36} k'''(x_0 + \theta_1(x - x_0)) \end{aligned}$$

și se vede imediat că primii patru termeni din această formulă sînt egali cu primii patru termeni din formula (29).

Observația 1. Diferența dintre valoarea exactă $y(x)$ a problemei (1) + (2) și valoarea aproximativă $\tilde{y}(x)$ dată de metoda Runge-Kutta este de ordinul lui $(x - x_0)^4$.

Observația 2. Metoda Runge-Kutta folosește valorile funcției f în mai multe puncte din intervalul de existență a soluției.

PROBLEME

Să se calculeze aproximațiile de ordinul trei pentru ecuația și sistemul următor

$$1) \quad y' = x + y^2 \quad y(0) = 0$$

$$R: y_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}$$

$$2) \quad y' = z, \quad z' = x^3(y + z); \quad y(0) = 1; \quad z(0) = \frac{1}{2}$$

$$R: y_3(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^8}{60} + \frac{x^9}{192}$$

$$z_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64} + \frac{7x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$$

CAPITOLUL XIII

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n INTEGRABILE PRIN CUADRATURI

§ 1. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA, $y^{(n)} = f(x)$, (1)

unde f o funcție continuă pe un interval I , se integrează ușor prin cuadraturi. În adevăr, din ecuația (1) obținem prin integrări succesive

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1; y^{(n-2)} = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1(x - x_0) + C_2; x \in I$$

$$y = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n \quad (2)$$

Formula (2) ne dă soluția generală a ecuației (1) și rezolvă următoarea problemă a lui Cauchy: să se găsească soluția ecuației (1) care satisface condițiile inițiale

$$y(x_0) = C_n; y'(x_0) = C_{n-1}, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = C_1$$

Se arată cu ușurință că soluția generală a ecuației (1) poate fi pusă și sub următoarea formă:

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-t)^{n-1} f(t) dt + C_1 \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1}(x-x_0) + C_n \quad (3)$$

Exemplu. Să se afle soluția ecuației

$$y''' = 24x$$

care satisface condițiile $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$; $y''(0) = 2$. Prin integrări succesive obținem

$$y = x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

și deci soluția care satisface condițiile date, este

$$y = x^4 + x^2 - x + 1$$

§ 2. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(x, y^{(n)}) = 0$. (4)

Dacă ecuația (4) poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

atunci prin integrarea tuturor ecuațiilor (5), obținem soluțiile ecuației (4). Presupunem că ecuația (4) nu poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, dar se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$. Fie

$$u = \varphi(t); v = \psi(t); t \in I$$

o reprezentare parametrică a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$ cu φ, φ' și ψ continue pe I . Avem deci

$$x = \varphi(t); y^{(n)} = \psi(t)$$

Dacă folosim egalitatea

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$$

obținem

$$dy^{(n-1)} = \psi(t) \varphi'(t) dt$$

de unde

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

Analog se calculează $y^{(n-2)}, \dots, y', y$ și obținem

$$y = \psi_n(t, C_1, \dots, C_n) \quad (6)$$

care împreună cu $x = \varphi(t)$ ne dă soluția generală a ecuației (4), sub formă parametrică.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + e^{y''} = x$$

Dacă luăm ca parametru pe $t = y''$ obținem

$$x = e^t + t; y'' = t$$

Avem

$$dy' = y'' dx = t(e^t + 1) dt$$

deci

$$y' = \int t(e^t + 1) dt + C_1 = (t - 1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1$$

$$dy = y' dx = \left[(t - 1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] (e^t + 1) dt$$

$$y = \int \left[(t - 1)e^t + \frac{t^2}{2} + C_1 \right] (e^t + 1) dt + C_2 = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1 \right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$$

Soluția generală este dată parametric:

$$x = e^t + t; \quad y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right) e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right) e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$$

§ 3. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 < k < n) \quad (6)$$

în care lipsesc $y, y', \dots, y^{(k-1)}$.

Prin schimbarea de variabilă $y^{(k)} = z$ ecuația (6) devine

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \quad (7)$$

adică o ecuație de ordinul $n - k$.

Dacă reușim să determinăm soluția generală a ecuației (7)

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

atunci integrarea ecuației diferențiale (6) se reduce la integrarea ecuației diferențiale

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) \quad (8)$$

care este de tipul (1).

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0$$

Facem schimbarea de variabilă $y^{(4)} = z$ și obținem ecuația

$$z' - \frac{1}{x} z = 0$$

care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția generală

$$z = C_1 x$$

Integrarea ecuației considerate se reduce la integrarea ecuației

$$y^{(4)} = C_1 x$$

care are soluția generală

$$y = C_1 \cdot \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

§ 4. ECUAȚII DE FORMA $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$ (9)

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$; $t \in I$ cu φ , φ' și ψ continue iar $\psi(t) \neq 0$ pe I atunci soluția generală a ecuației (9) se obține prin n cuadraturi. În adevăr, avem

$$y^{(n-1)} = \varphi(t); y^{(n)} = \psi(t); t \in I$$

și din relația

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx$$

obținem

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)}$$

atunci

$$x = \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C_1$$

Avem deci

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C; y^{(n-1)} = \varphi(t)$$

În continuare procedăm la fel ca în cazul ecuațiilor de tipul (2) și obținem soluția generală sub formă parametrică.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'''y'' = 1$$

O reprezentare parametrică este $y'' = t$, $y''' = \frac{1}{t}$; $t \neq 0$. Din relația

$$dy'' = y''' dx$$

deducem $dx = t dt$; deci $x = \frac{t^2}{2} + C_1$

Dar $y' = \int y'' dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C_2$

$$y = \int y' dx = \int \left(\frac{t^3}{3} + C_2 \right) t dt = \frac{t^5}{15} + C_2 \frac{t^2}{2} + C_3.$$

Soluția generală a ecuației considerate este

$$x = \frac{t^2}{2} + C_1$$

$$y = \frac{t^5}{15} + \frac{t^2}{2} + C_3$$

§ 5. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ (10)

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$,

$$u = \varphi(t), v = \psi(t), t \in I$$

cu φ , φ' și ψ continue pe I , atunci integrarea ecuației (10) se face prin cuadraturi. În adevăr, avem

$$y^{(n-2)} = \varphi(t); y^{(n)} = \psi(t)$$

și dacă ținem seama de egalitățile

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)} dx; dy^{(n-2)} = y^{(n-1)} dx$$

obținem

$$y^{n-1} dy^{(n-1)} = y^{(n)} dy^{(n-2)}$$

de unde deducem

$$y^{(n-1)} dy^{(n-1)} = \psi(t) \varphi'(t) dt$$

deci

$$(y^{(n-1)})^2 = 2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C$$

Mai departe obținem

$$y^{(n-1)} = \pm \sqrt{2 \int \psi(t) \varphi'(t) dt + C}$$

care împreună cu $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ permite aflarea soluțiilor ecuației (10) folosind procedeul dat la ecuațiile de tipul (4).

§ 6. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (11)$$

în care lipsește variabila independentă x . Ordinul ecuației diferențiale (11) se reduce cu o unitate dacă facem următoarea schimbare de variabilă: luăm ca funcție necunoscută pe

$$p = \frac{dy}{dx}$$

iar ca variabilă independentă pe y . Deducem atunci că

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dx} \left(p \frac{dp}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left(p \frac{dp}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = \left(p \frac{d^2 p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy} \right)^2 \right) p$$

În mod asemănător se calculează toate derivatele pînă la ordinul n .

Introducând expresiile derivatelor $y'', \dots, y^{(n)}$ în ecuația (11) vom obține o nouă ecuație diferențială dar de ordinul $n - 1$

$$F_1(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0 \quad (12)$$

Dacă reușim să determinăm soluția generală a ecuației (12)

$p = \varphi(y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$ atunci integrarea ecuației diferențiale (11) se reduce la integrarea ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = (y, C_1, C_2, \dots, C_{n-1})$$

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $p = y'$ avem $y'' = p \frac{dp}{dy}$ și înlocuim în ecuația dată, obținem o ecuație cu variabile separabile

$$yp \frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

cu soluția generală $p = C_1 y$ sau $\frac{dy}{dx} = C_1 y$.

Ultima ecuație este tot cu variabile separabile și are soluția generală

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

§ 7. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ (13)

OMOGENE ÎN ARGUMENTELE $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Sînt ecuații care satisfac egalitate

$$F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

Prin schimbarea de variabilă $y = e^{\int z dx}$, unde z este noua funcție necunoscută, ordinul ecuației se reduce cu o unitate. Prin derivare obținem

$$y' = z e^{\int z dx}$$

$$y'' = (z^2 + z') e^{\int z dx}$$

$$y''' = (z^3 + 3zz' + z'') e^{\int z dx}$$

.....

$$y^{(k)} = \Phi(z, z', \dots, z^{(k-1)}) e^{\int z dx}$$

Înlocuind derivatele lui y în ecuația (13) și ținând cont de omogenitatea lui F avem

$$0 = F \left[x, e^{\int z \, dx}, z e^{\int z \, dx}, (z' + z^2) e^{\int z \, dx}, \dots, \Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)}) e^{\int z \, dx} \right] = \\ = e^{m \int z \, dx} F(x, 1, z, z' + z^2, \dots, \Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)}))$$

Obținem deci o ecuație de ordinul $n - 1$.

$$F[x, 1, z, z' + z^2, \dots, \Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)})] = 0$$

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2$$

Facem schimbarea de variabilă $y = e^{\int z \, dx}$ și obținem

$$z' = 6x; \quad z = 3x^2 + C_1; \quad y = e^{\int (3x^2 + C_1) \, dx}; \quad \text{deci} \\ y = e^{x^3 + C_1 x + C_2}$$

Observație. Același rezultat se obține dacă facem schimbarea de variabilă

$$y' = yz$$

unde z este noua necunoscută.

PROBLEME

Să se integreze următoarele ecuații:

$$1) \, y^{(iv)} = \cos^2 x; \, y(0) = \frac{1}{32}; \, y'(0) = 0; \, y''(0) = \frac{1}{8}; \, y'''(0) = 0.$$

$$R: y = \frac{1}{48} x^4 + \frac{1}{8} x^2 + \frac{1}{32} \cos 2x.$$

$$2) \, y''' \sin^4 x = \sin 2x; \quad R: y = \ln |\sin x| + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$3) \, xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}; \quad R: y = \frac{1}{C_1} x e^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2$$

$$4) \, (1 - x^2) y'' - xy' = 2; \quad R: y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$$

$$5) \, (x - 1) y''' - y'' = 0; \, y(2) = 2; \, y'(2) = 1; \, y''(2) = 1$$

$$R: y = \frac{1}{6} (x^3 - 3x^2 + 6x + 4)$$

$$6) 1 + y'^2 = yy''$$

$$R: y = \frac{1}{C_1} \operatorname{Ch} C_1 (x + C_2)$$

$$7) y(1 - \ln y) y'' + (1 + \ln y) y'^2 = 0$$

$$R: y = e^{\frac{x+C_2}{C_1}}$$

$$8) y'^2 + yy'' = yy'$$

$$R: \frac{1}{2} y^2 = C_1 e^x + C_2$$

$$9) 3y'^2 = 4yy'' + y^2$$

$$R: y = C_2 \cos^4 \left(C_1 - \frac{x}{4} \right)$$

$$10) y''' = \sqrt{1 + y''^2}$$

$$R: y = \operatorname{sh}(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

$$11) y'''^2 + y''^2 = 1$$

$$R: y = -\sin(x + C_1) + C_2 x + C_3$$

CAPITOLUL XIV

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n LINIARE

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE. DEPENDENȚĂ LINEARĂ.

O ecuație diferențială de ordinul n literară este o ecuație de forma

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \quad (1)$$

unde funcțiile reale $a_1, \dots, a_n$ (coeficienții ecuației) și f (termenul liber) sînt definite și continue pe un același interval I .

O ecuație diferențială de ordinul n , liniară poate fi pusă sub formă mai generală

$$a_0(x) y^n + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \quad (1')$$

Dacă $a_0(x) \neq 0$ pe I atunci ecuația (1') poate fi adusă la forma (1). Dacă $f(x) \equiv 0$ pe intervalul I , atunci ecuația (1) devine

$$y^n + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (2)$$

și se numește ecuația diferențială de ordinul n liniară și omogenă.

În continuare pentru prescurtarea scrierii, introducem următorul operator diferențial liniar

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + a_n(x)$$

cu ajutorul căruia ecuația (1) devine

$$L(y) = f(x) \quad (3)$$

iar ecuația (2) devine

$$L(y) = 0 \quad (4)$$

Din modul cum a fost definit, se vede că operatorul L este complet determinat de coeficienții ecuației (1). Operatorul L are următoarele proprietăți:

Proprietatea 1.1.

$$L(Cy) = CL(y)$$

unde C este o constantă arbitrară. În adevăr, avem

$$\begin{aligned} L(Cy) &= (Cy)^{(n)} + a_1(x) (Cy)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) (Cy)' + \\ &+ a_n(x) (Cy) = C[y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + \\ &+ a_n(x) y] = CL(y) \end{aligned}$$

Proprietatea 2.1.

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$$

În adevăr avem,

$$\begin{aligned} L(y_1 + y_2) &= (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x) (y_1 + y_2)^{(n-1)} + a_2(x) (y_1 + y_2)^{(n-2)} + \\ &+ \dots + a_{n-1}(x) (y_1 + y_2)' + a_n(x) (y_1 + y_2) = y_1^{(n)} + a_1(x) y_1^{(n-1)} + \\ &+ a_2(x) y_1^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y_1' + a_n(x) y_1 + y_2^{(n)} + \\ &+ a_1(x) y_2^{(n-1)} + a_2(x) y_2^{(n-2)} + \dots + \\ &+ a_{n-1}(x) y_2' + a_n(x) y_2 = L(y_1) + L(y_2) \end{aligned}$$

Proprietatea 3.1.

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) + \dots + C_n L(y_n),$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sînt constante arbitrare.

Această proprietate rezultă imediat din proprietățile 1 și 2.

În continuare ne vom ocupa de ecuațiile diferențiale de ordinul n , liniare și omogene adică de ecuații de forma (2) sau (4). Folosind proprietățile operatorului L vom deduce proprietățile pe care le au soluțiile unei ecuații liniare și omogene.

Teorema 1.1. Dacă y_1 este o soluție a ecuației diferențiale omogene (4) atunci și Cy_1 este soluție a ecuației omogene (4) oricare ar fi constanta C .

Demonstrație. Prin ipoteză avem $L(y_1) = 0$. Folosind proprietatea 1 a operatorului L , obținem

$$L(Cy_1) = 0$$

adică Cy_1 este soluție a ecuației (4).

Teorema 2.1. Dacă y_1 și y_2 sînt două soluții ale ecuației diferențiale omogene (4) atunci și $y_1 + y_2$ este soluție a ecuației (4).

Demonstrație. Prin ipoteză avem $L(y_1) = L(y_2) = 0$. Folosind proprietatea 2 a operatorului L , obținem

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$$

deci și $y_1 + y_2$ este soluție a ecuației (4).

Teorema 3.1. Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației diferențiale omogene (4) atunci și funcția

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n \quad (5)$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sînt constante arbitrare, este soluție a ecuației (4).

Demonstrație. Prin ipoteză avem $L(y_1) = L(y_2) = \dots = L(y_n) = 0$ și dacă folosim proprietatea 3 a operatorului L , obținem

$$L(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n) = C_1 L(y_1) + C_2 L(y_2) + \dots + C_n L(y_n) = 0$$

Teorema 4.1. Dacă ecuația diferențială omogenă (4) admite ca soluție funcția complexă de variabilă reală

$$y(x) = u(x) + i v(x); \quad x \in I$$

atunci funcțiile reale u și v sînt, fiecare în parte, soluții ale ecuației (4).

Demonstrație. Din proprietatea 3 a operatorului L obținem

$$L(u + i v) = L(u) + i L(v)$$

Prin ipoteză avem $L(u + i v) = 0$ și deci $L(u) + i L(v) = 0$. Din ultima egalitate deducem $L(u) = L(v) = 0$, adică funcțiile u și v sînt soluții ale ecuației (4).

Funcția y dată de (5) este soluție a ecuației (2) și conține n constante arbitrare. Vom stabili în continuare condițiile pe care trebuie să le îndeplinească n soluții $y_1, y_2, \dots, y_n$ ale ecuației (2), astfel încît orice soluție a ecuației (2) să se obțină din (5) prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, \dots, C_n$. În acest scop este necesară următoarea definiție.

Definiția 1.1. Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$: n funcții reale definite și continue pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$. Spunem că aceste n funcții sînt liniar independente pe intervalul I dacă nu există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nu toate nule astfel încît să avem

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$.

Dacă există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nu toate nule, astfel încît să avem

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$, atunci spunem că cele n funcții sînt liniar dependente pe I .

Exemplu 1. Funcțiile $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ sau pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$. În adevăr egalitatea

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + \dots + \lambda_n x^{n-1} = 0$$

unde nu toate numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sînt egale cu zero, nu poate avea loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$ deoarece este o ecuație algebrică de grad cel mult egal cu $n - 1$ și admite cel mult $n - 1$ rădăcini reale. Egalitatea este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$ numai dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Exemplu 2. Funcțiile $y_1 = e^x$ și $y_2 = e^{-x}$ sînt liniar independente pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$. În adevăr egalitatea $\lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} = 0$ unde λ_1 și λ_2 sînt numere diferite de zero nu poate fi îndeplinită decît într-un punct așa cum rezultă din faptul că

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

Exemplu. 3. Funcțiile $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ sînt liniar dependente pe $\mathbf{R}$. În adevăr, avem

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0 \quad (\forall) \quad x \in \mathbf{R}$$

În acest caz $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$

Exercițiu. Fie $r_1, r_2, \dots, r_m$; m numere reale diferite între ele și $p_1, p_2, \dots, p_m$; m numere naturale. Atunci funcțiile

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{p_1} e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, x^2 e^{r_2 x}, \dots, x^{p_2} e^{r_2 x}$$

.....

$$e^{r_m x}, x e^{r_m x}, x^2 e^{r_m x}, \dots, x^{p_m} e^{r_m x}$$

sînt liniar independente pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$. Funcțiile

$$x^{r_1}, x^{r_1} \ln x, \dots, x^{r_1} (\ln x)^{p_1}$$

$$x^{r_2}, x^{r_2} \ln x, \dots, x^{r_2} (\ln x)^{p_2}$$

.....

$$x^{r_m}, x^{r_m} \ln x, \dots, x^{r_m} (\ln x)^{p_m}$$

sînt liniar independente pe intervalul $(0, \infty)$.

Definiția 2.1. Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$; n funcții reale definite și derivabile de $n - 1$ ori pe intervalul I . Determinantul

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numește determinantul lui Wronski sau Wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Importanța Wronskianului va rezulta din teoremele care urmează în legătură cu funcțiile liniar independente sau liniar dependente, sau în legătură cu integrarea ecuațiilor diferențiale omogene (2).

Teorema 5.1. Dacă funcțiile reale $y_1, y_2, \dots, y_n$ definite pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$ admit derivate de ordinul $n - 1$ și sînt liniar dependente pe intervalul I atunci

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0, \quad (\forall) \quad x \in I$$

Demonstrație. Funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n$ fiind presupuse în dependență liniară pe intervalul I , există numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, nu toate nule, astfel încît

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0 \quad (6)$$

pentru orice $x \in I$.

Demonstrație. Presupunem că Wronskianul $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ se anulează într-un punct $x_0 \in I$. Considerăm sistemul algebric de ecuații liniare și omogene

$$\begin{aligned} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) &= 0 \\ C_1 y'_1(x_0) + C_2 y'_2(x_0) + \dots + C_n y'_n(x_0) &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ C_1 y^{(n-1)}_1(x_0) + C_2 y^{(n-1)}_2(x_0) + \dots + C_n y^{(n-1)}_n(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Determinantul sistemului (11) este nul, deoarece el este tocmai Wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \dots, y_n$ presupus nul în punctul x_0 . În acest caz sistemul (11) admite soluții diferite de cea banală. Fie $C_1, C_2, \dots, C_n$ o astfel de soluție, deci numerele $C_1, C_2, \dots, C_n$ nu sînt toate nule și cu ajutorul lor formăm funcția

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (12)$$

În baza teoremei 3.1. deducem că și funcția y este soluție a ecuației (8). Datorită ecuațiilor (11), soluția (12) satisface condițiile inițiale (10). Dar singura soluție a ecuației (8) care satisface condițiile inițiale (10) este $y = 0$ și deci

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0 \quad (13)$$

Numerele $C_1, C_2, \dots, C_n$ nefiind toate nule, relația (13) arată că funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt liniar dependente pe I , fapt care contrazice ipoteza. Deci $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ pe I și teorema este demonstrată.

Observația 1. Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației (8), atunci ele sînt liniar independente pe intervalul I dacă și numai dacă $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ pe I .

În adevăr, dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației (8), liniar independente pe I atunci din teorema 1.2. deducem:

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0 \text{ по } I.$$

Invers, dacă $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ pe I atunci soluțiile $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt liniar independente pe I , căci dacă ar fi liniar dependente pe I , din teorema 5.1. am deduce că $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ pe I .

Observația 2. Dacă Wronskianul a n soluții ale ecuației (8) este nul într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este nul pe tot intervalul I .

În adevăr, dacă Wronskianul a n soluții $y_1, y_2, \dots, y_n$ este nul într-un punct $x_0 \in I$, atunci din demonstrația teoremei 1.2. rezultă că funcțiile $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt liniar dependente pe I și conform teoremei 5.1. deducem că $W(y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$ pe I .

Observația 3. Dacă Wronskianul a n soluții $y_1, y_2, \dots, y_n$ ale ecuației (8) este diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este diferit de zero pe tot intervalul I .

În adevăr, dacă Wronskianul a n soluții ale ecuației (8) ar fi nul într-un punct x_1 , atunci conform observației 2 ar fi nul și în punctul x_0 .

Observația 2. Tot din teorema 2.2 rezultă că problema integrării unei ecuații diferențiale liniare și omogene (8) se reduce la găsirea a n soluții ale ecuației (8) care să formeze un sistem fundamental de soluții pe I .

Observația 3. Dacă se cunoaște o soluție $y_1 \neq 0$ a ecuației diferențiale (8) atunci prin schimbarea de variabilă

$$y = y_1 \int u(x) dx$$

ordinul ecuației (8) se reduce cu o unitate.

Exemplu. Să se afle soluția ecuației generale a ecuației

$$xy'' - xy' + y = 0$$

știind că $y_1 = x$ este o soluție a acestei ecuații.

Facem schimbarea de variabilă

$$y = x \int u dx; \text{ deci } y' = xu + \int u dx;$$

$$y'' = xu' + 2u$$

Dacă înlocuim în ecuația dată obținem

$$x^2 u' + (2 - x) xu = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x-2}{x} dx; u = C_1 \frac{e^x}{x^2};$$

$$y = x \int u dx = x \left(C_1 \int \frac{e^x}{x^2} + C_2 \right)$$

§ 3. SOLUȚIA GENERALĂ A ECUAȚIEI $L(y) = f(x)$.

Fie ecuația diferențială de ordinul n liniară și neomogenă

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \quad (1)$$

unde funcțiile reale $a_1, a_2, \dots, a_n$ (coeficienții ecuației) și funcția f (termenul liber) sînt definite și continue pe un același interval $I \subset \mathbf{R}$. În aceste condiții are loc

Teorema 1.3. Soluția generală a ecuației (1) se obține adăugînd la soluția generală a ecuației omogene $L(y) = 0$ o soluție particulară, oarecare a ecuației neomogene (1).

Demonstrație. Fie y_p o soluție particulară a ecuației neomogene (1), deci

$$L(y_p) = f(x), \quad x \in I$$

Facem schimbarea de variabilă $y = z + y_p$.

Ținând cont de liniaritatea operatorului L

$$L(z) + L(y_p) = f(x)$$

și de faptul că

$$L(y_p) = f(x)$$

avem

$$L(z) = 0$$

Ecuația $L(y) = 0$ (sau $L(z) = 0$) se numește ecuația omogenă atașată ecuației neomogene (1).

Dacă $y_1, y_2, \dots, y_n$ este un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene $L(y) = 0$, pe intervalul I , atunci soluția generală a ecuației neomogene (1) este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n + y_p \quad (17)$$

În adevăr, dacă ținem seama de definiția soluției generale pentru o ecuație diferențială de ordinul n și dacă folosim procedeul dat în demonstrația teoremei 2.2, rezultă că funcția y dată la (17) este soluția generală a ecuației (1).

Observație. Dacă membrul drept al ecuației (1) este de forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

dacă y_{10} și y_{20} sînt, respectiv, soluții particulare ale ecuațiilor

$$L(y) = f_1(x); \quad L(y) = f_2(x)$$

atunci funcția $y_{10} + y_{20}$ este o soluție particulară a ecuației

$$L(y) = f(x) \quad (1)$$

În adevăr, avem

$$L(y_{10}) = f_1(x) \text{ și } L(y_{20}) = f_2(x)$$

Dar

$$L(y_{10} + y_{20}) = L(y_{10}) + L(y_{20})$$

și deci

$$L(y_{10} + y_{20}) = f_1(x) + f_2(x)$$

Ultima egalitate arată că $y_{10} + y_{20}$ este o soluție a ecuației (1).

Un rezultat asemănător se obține în cazul în care

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)$$

Din teorema 1.3 rezultă că pentru aflarea soluției generale a ecuației neomogene

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

este suficient să cunoaștem un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene

$$L(y) = 0$$

și o soluție particulară a ecuației neomogene (1).

Aflarea unei soluții particulare a ecuației neomogene (1) este o problemă în general dificilă. În unele cazuri pe care le vom vedea mai departe o astfel de soluție se poate obține destul de simplu. Dacă nu cunoaștem o soluție particulară a ecuației (1) dar cunoaștem soluția generală a ecuației omogene $L(y) = 0$, atunci se poate afla soluția generală a ecuației neomogene (1) prin metoda variației constantelor a lui Lagrange. Vom arăta că soluția generală a ecuației neomogene (1) se obține cu ajutorul acestei metode prin n cuadraturi.

Fie $y_1, y_2, \dots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației ~~ne~~omogene $L(y) = 0$, atunci soluția ei generală va fi

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) \quad (18)$$

Vom căuta soluția generală a ecuației neomogene (1) de aceeași formă cu soluția generală a ecuației ~~ne~~omogene înlocuind constantele $C_1, C_2, \dots, C_n$ cu funcții derivabile depinzând de x . Notăm aceste funcții cu

$$C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x); x \in I$$

Prin urmare soluția generală a ecuației (1) o căutăm de forma

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) \quad (19)$$

Vom impune funcției dată de (19) să verifice ecuația (1). Pentru aflarea funcțiilor $C_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) mai trebuie impuse încă $n - 1$ condiții. Aceste condiții constau în aceea că primele $n - 1$ derivate ale funcției (19) să nu conțină pe $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$; atunci avem

$$\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i \\ y' &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y'_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i}_0 \\ y'' &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y''_i + \underbrace{\sum_{i=1}^n C'_i(x) y'_i}_0 \\ &\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} &= \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-2)}}_0 \end{aligned} \quad (20)$$

Atunci

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-1)}$$

Înlocuim aceste valori ale lui $y', y'', \dots, y^{(n)}$ în ecuația (1) și obținem

$$\sum_{i=1}^n C_i[y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y_i' + a_n y_i] + \sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-1)} = f(x)$$

sau

$$\sum_{i=1}^n C_i L(y_i) + \sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-1)} = f(x)$$

Am presupus pe $y_1, y_2, \dots, y_n$ soluții ale ecuației omogene $L(y) = 0$, și deci $L(y_i) = 0$, $i = 1, \dots, n$; atunci din ultima egalitate obținem

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) y_i^{(n-1)} = f(x) \quad (21)$$

Condițiile impuse la (20) împreună cu ecuația (21) ne dau pentru funcțiile $C_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$\begin{aligned} C'_1(x) y_1 + C'_2(x) y_2 + \dots + C'_n(x) y_n &= 0 \\ C'_1(x) y'_2 + C'_2(x) y'_2 + \dots + C'_n(x) y'_n &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (22)$$

$$C'_1(x) y_1^{(n-2)} + C'_2(x) y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n(x) y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C'_1(x) y_1^{(n-1)} + C'_2(x) y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n(x) y_n^{(n-1)} = f(x)$$

Sistemul (22) poate fi considerat ca un sistem algebric liniar și neomogen de n ecuații cu necunoscutele $C'_i(x)$; $i = 1, \dots, n$. Determinantul acestui sistem este $W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$ pe I , deci sistemul (22) are soluție unică și fie

$$C'_i(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, \dots, n, \quad x \in I \quad (23)$$

soluția acestui sistem. Din (23) obținem

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + k_i; \quad k_i \text{ constante.}$$

Dacă înlocuim pe $C_i(x)$ în (19) obținem soluția generală a ecuației (1):

$$y = \sum_{i=1}^n \left(k_i + \int \varphi_i(x) dx \right) y_i = \sum_{i=1}^n k_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i \int \varphi_i(x) dx \quad (24)$$

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

știind că $y_1 = \cos x$ și $y_2 = \sin x$ sînt două soluții ale ecuației omogene $y'' + y' = 0$.

Soluția generală a ecuației $y'' + y = 0$ este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Sistemul (22) devine în acest caz

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x &= 0 \\ -C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x &= \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

de unde obținem

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x; \quad C_2'(x) = 1$$

deci

$$C_1(x) = k_1 + \ln |\cos x|; \quad C_2(x) = k_2 + x$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = k_1 \cos x + k_2 \sin x + (\cos x) \ln |\cos x| + x \sin x$$

Exemplu 2. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + a^2 y = f(x), \quad x \in I, \quad a \neq 0$$

știind că $y_1 = \cos ax$ și $y_2 = \sin ax$ sînt două soluții ale ecuației omogene $y'' + a^2 y = 0$.

Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

În acest caz sistemul (22) devine

$$\begin{aligned} C_1'(x) \cos ax + C_2'(x) \sin ax &= 0 \\ -aC_1'(x) \sin ax + aC_2'(x) \cos ax &= f(x) \end{aligned}$$

de unde obținem

$$C_1'(x) = -\frac{1}{a} f(x) \sin ax; \quad C_2'(x) = \frac{1}{a} f(x) \cos ax$$

deci

$$\begin{aligned} C_1(x) &= k_1 - \frac{1}{a} \int f(x) \sin ax \, dx; \\ C_2(x) &= k_2 + \frac{1}{a} \int f(x) \cos ax \, dx \end{aligned}$$

Soluția generală a ecuației date este

$$\begin{aligned} y &= k_1 \cos ax + k_2 \sin ax - \frac{\cos ax}{a} \int f(x) \sin ax \, dx + \\ &\quad + \frac{\sin ax}{a} \int f(x) \cos ax \, dx \end{aligned}$$

care se mai poate pune și sub forma

$$y = k_1 \cos ax + k_2 \sin ax + \frac{1}{a} \int_{x_0}^x f(t) \sin a(x-t) dt; \quad x_0 \in I$$

§ 4. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE OMOGENE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

Sînt ecuații de forma

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (25)$$

unde $a_i (i = 1, \dots, n)$ sînt constante reale. Este evident că teoremele generale asupra ecuațiilor liniare se aplică și în acest caz. În particular, teorema de existență și unicitate se aplică întocmai dacă ținem seama de faptul că a_i sînt funcții constante și deci continue pe $\mathbf{R}$. Putem deci afirma că oricare ar fi $x_0 \in \mathbf{R}$ și oricare ar fi $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, există o singură soluție y a ecuației (25) care satisface condițiile inițiale:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Am văzut în teorema 2.2. că rezolvarea unei ecuații diferențiale de ordinul n liniară și omogenă revine la aflarea unui sistem fundamental de soluții. În continuare vom arăta cum se face acest lucru în cazul unei ecuații cu coeficienți constanți. În acest scop folosim metoda lui Euler. Căutăm pentru ecuația (25) soluții de forma

$$y = e^{rx}, \quad r \text{ constant} \quad (26)$$

Avem

$$y^{(k)} = r^k e^{rx}$$

și dacă înlocuim în ecuația (25) obținem

$$L(e^{rx}) = e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = 0 \quad (27)$$

deoarece $e^{rx} \neq 0$ ($\forall x \in \mathbf{R}$, din (27) deducem

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (28)$$

Prin urmare numărul r trebuie să fie rădăcină a ecuației algebrice (28) care se numește ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (25).

Polinomul

$$k(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n \quad (29)$$

se numește polinomul caracteristic al ecuației (25) și este evident că are loc egalitatea

$$L(e^{rx}) = e^{rx} k(r) \quad (30)$$

Deci pentru integrarea unei ecuații diferențiale liniare cu coeficienți (reali) constanți, trebuie să ținem seama de natura rădăcinilor ecuației caracteristice $k(r) = 0$.

a) Ecuația caracteristică are rădăcini reale și distincte. Fie $r_1, r_2, \dots, r_n$ aceste rădăcini, atunci

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}$$

formează un sistem fundamental de soluții. În adevăr, avem

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \dots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \dots & r_n e^{r_n x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \dots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + r_2 + \dots + r_n)x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \dots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ultimul determinant este determinantul lui Vandermonde și este diferit de zero deoarece numerele $r_i (i = 1, \dots, n)$ au fost presupuse distincte. În acest caz soluția generală a ecuației (25) este:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$$

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Ecuația caracteristică este

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$. Soluția generală este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

Exemplu 2.

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 0, r_2 = 1, r_3 = 2$. Soluția generală este

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

b) Ecuația caracteristică are rădăcini reale multiple. În acest caz are loc

Teorema 1.4. Dacă ecuația caracteristică $k(r) = 0$ are o rădăcină reală $r = r_1$ multiplă cu ordinul de multiplicitate p , atunci funcțiile

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \dots, x^{p-1} e^{r_1 x}, x \in \mathbf{R}$$

sînt soluții liniar independente ale ecuației (25).

Demonstrație. Vom demonstra mai întâi următoarea identitate

$$L(e^{rx}z) = e^{rx} \left[k(r)z + \frac{k'(r)}{1!} z' + \dots + \frac{k^{(n)}(r)}{n!} z^{(n)} \right] \quad (30)$$

unde z este o funcție derivabilă de n ori și $k(r)$ este polinomul caracteristic. Derivatele succesive ale produsului $e^{rx}z$ se calculează cu ajutorul formulei lui Leibniz pentru derivate de ordinul n a unui produs de funcții și obținem:

$$y = e^{rx}z, \quad y' = e^{rx}(rz + z'); \quad y'' = e^{rx}(r^2z + 2rz' + z''), \dots$$

$$y^{(n)} = e^{rx}(r^n z + C_n^1 r^{n-1} z' + C_n^2 r^{n-2} z'' + \dots + C_n^n z^{(n)})$$

Avem

$$\begin{aligned} L(e^{rx}z) &= (e^{rx}z)^{(n)} + a_1(e^{rx}z)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(e^{rx}z)' + a_n e^{rx}z = \\ &= e^{rx}(r^n z + C_n^1 r^{n-1} z' + C_n^2 r^{n-2} z'' + \dots + C_n^n z^{(n)}) + \\ &+ a_1 e^{rx}(r^{n-1} z + C_{n-1}^1 r^{n-2} z' + C_{n-1}^2 r^{n-3} z'' + \dots + C_{n-1}^{n-1} z^{(n-1)}) + \\ &+ a_2 e^{rx}(r^{n-2} z + C_{n-2}^1 r^{n-3} z' + C_{n-2}^2 r^{n-4} z'' + \dots + C_{n-2}^{n-2} z^{(n-2)}) + \\ &\dots \\ &+ a_{n-1} e^{rx}(rz + z') + a_n e^{rx}z = \end{aligned}$$

și dacă ordonăm după $z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}, z^{(n)}$ obținem

$$\begin{aligned} L(e^{rx}z) &= e^{rx}[r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots + a_{n-1}r + a_n]z + \\ &+ \frac{1}{1!} e^{rx}[nr^{n-1} + a_1(n-1)r^{n-2} + \dots + 1 \cdot a_{n-1}]z' + \\ &+ \frac{1}{2!} e^{rx}[n(n-1)r^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)r^{n-3} + \dots + 2 \cdot 1 a_{n-2}]z'' + \\ &\dots \\ &+ \frac{1}{n!} e^{rx}n(n-1) \dots 2 \cdot 1 z^{(n)} = e^{rx} \left[k(r)z + \frac{k'(r)}{1!} z' + \dots + \frac{k^{(n)}(r)}{n!} z^{(n)} \right] \end{aligned}$$

deoarece $r = r_1$ a fost presupusă rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației $k(r) = 0$ rezultă

$$k(r_1) = k'(r_1) = \dots = k^{(p-1)}(r_1) = 0 \text{ și } k^{(p)}(r_1) \neq 0$$

și identitatea (30) devine

$$L(e^{rx}z) = e^{rx} \left[\frac{k^{(p)}(r_1)}{p!} \cdot z^{(p)} + \dots + \frac{k^{(n)}(r_1)}{n!} z^{(n)} \right] \quad (31)$$

Dacă înlocuim pe z cu $1, x, \dots, x^{p-1}$ avem evident

$$L(e^{rx}) = 0, \quad L(x e^{rx}) = 0, \dots, L(x^{p-1} e^{rx}) = 0$$

adică funcțiile din enunțul teoremei sînt soluții ale ecuației (25). Ele sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ căci dacă egalitatea

$$\lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 x e^{r_1 x} + \dots + \lambda_p x^{p-1} e^{r_1 x} = 0 \quad (32)$$

are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$ atunci are loc și egalitatea

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \dots + \lambda_p x^{p-1} = 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Am arătat că funcțiile

$$1, x, x^2, \dots, x^{p-1}$$

sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ și deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$. Prin urmare egalitatea (32) are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$, numai dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$, adică funcțiile considerate sînt liniar independente și teorema este demonstrată.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \text{ sau } (r + 1)^3 = 0, \text{ deci}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = -1$$

Avem $r = -1$ rădăcină triplă, $p = 3$. Soluțiile

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = x e^{-x} \text{ și } y_3 = x^2 e^{-x}$$

formează un sistem fundamental, soluția generală este

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

În cazul în care ecuația caracteristică $k(r) = 0$ are toate rădăcinile reale, problema aflării soluției generale a ecuației diferențiale (25) se rezolvă cu ajutorul rezultatelor stabilite la cazurile a) și b). Să presupunem că ecuația caracteristică are m rădăcini distincte:

r_1 multiplă de ordinul p_1

r_2 multiplă de ordinul p_2

.....

r_m multiplă de ordinul p_m

unde $p_1 + p_2 + \dots + p_m = n$ și $p_i \geq 1$ ($i = 1, \dots, m$)

În baza teoremei 1.4. ecuația (25) are soluțiile

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{p_1-1} e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x}, x e^{r_2 x}, \dots, x^{p_2-1} e^{r_2 x}$$

.....

$$e^{r_m x}, x e^{r_m x}, \dots, x^{p_m-1} e^{r_m x}$$

pe prima linie am scris soluțiile care corespund rădăcinii r_1 , pe linia a doua am scris soluțiile corespunzătoare rădăcinii r_2 ș.a.m.d. Dacă ținem seama de

exercițiul de la §1. cap. XIV rezultă că aceste soluții sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ și deci soluția generală se află imediat.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

Ecuatia caracteristică

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 3$; $r_2 = 2 = r_3$. În acest caz $m = 2$,

$$r_1 = 3 \text{ rădăcină simplă; } p_1 = 1$$

$$r_2 = 2 \text{ rădăcină dublă; } p_2 = 2$$

Funcțiile e^{3x} , e^{2x} , xe^{2x} formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația dată și deci soluția generală este

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$

c) Ecuatia caracteristică are rădăcini complexe. În acest caz are loc

Teorema 2.4. Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ este o rădăcină complexă a ecuației caracteristice $k(r) = 0$, multiplă de ordinul p , (eventual simplă) atunci ecuația diferențială (25) are soluțiile liniar independente

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ x e^{\alpha x} \cos \beta x & x e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x^{p-1} e^{\alpha x} \cos \beta x & x^{p-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$$

Demonstrație. În adevăr, dacă ecuația $k(r) = 0$ cu coeficienții reali, are o rădăcină complexă $r_1 = \alpha + i\beta$ multiplă de ordinul p atunci și $r_2 = \alpha - i\beta$ este o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației $k(r) = 0$. Se arată exact ca și în cazul rădăcinilor reale multiple că celor două rădăcini complexe, le corespund pentru ecuația diferențială (25) următoarele soluții (funcții complexe)

$$\begin{array}{ll} e^{(\alpha+i\beta)x} & e^{(\alpha-i\beta)x} \\ x e^{(\alpha+i\beta)x} & x e^{(\alpha-i\beta)x} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x^{p-1} e^{(\alpha+i\beta)x} & x^{p-1} e^{(\alpha-i\beta)x} \end{array}$$

sau dacă folosim formulele lui Euler, obținem

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x); & e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ x e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x); & x e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x^{p-1} e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x); & x^{p-1} e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{array}$$

Avem deci

$$L(x^k e^{\alpha x} \cos \beta x + i x^k e^{\alpha x} \sin \beta x) = 0; \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

Dacă folosim teorema 4.1. rezultă că funcțiile reale

$$x^k e^{\alpha x} \cos \beta x; \quad x^k e^{\alpha x} \sin \beta x, \quad k = 0, 1, \dots, p-1$$

sînt soluții ale ecuației (25). Se arată că aceste soluții sînt liniar independente.

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + 4y' + 5 = 0$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^2 + 4r + 5 = 0.$$

și are rădăcini simple ($p = 1$) $r_1 = -2 + i$; $r_2 = -2 - i$; deci $\alpha = -2$; $\beta = 1$ și soluția generală este

$$y = C_1 e^{-2x} \cos x + C_2 e^{-2x} \sin x$$

Exemplu 2.

$$y'' + a^2 y = 0$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^2 + a^2 = 0$$

și deci $r_1 = ia$; $r_2 = -ia$; avem $\alpha = 0$; $\beta = a$ și soluția generală este

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

Exemplu 3.

$$y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0$$

Ecuația caracteristică atașată este

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0 \text{ sau } (r^2 + 4)^2 = 0$$

Rădăcinile ei sînt

$$r_1 = r_2 = 2i; \quad r_3 = r_4 = -2i$$

deci $\alpha = 0$; $\beta = 2$; $p = 2$. Soluția generală este

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + C_3 x \cos 2x + C_4 x \sin 2x$$

d) În cazul în care ecuația caracteristică $k(r) = 0$ are și rădăcini reale și rădăcini complexe, simple sau multiple, atunci soluția generală a ecuației diferențiale (25) se află în felul următor: pentru fiecare rădăcină a ecuației caracteristice construim soluțiile corespunzătoare ecuației diferențiale (25) așa cum s-a arătat în cazurile a), b) și c).

Obținem în acest mod pentru ecuația diferențială (25) n soluții

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

liniar independente pe $\mathbf{R}$ și deci soluția sa generală va fi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$$

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$$

Ecuația caracteristică

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 = 0$$

are rădăcinile $r_1 = r_2 = 2$; $r_3 = i$, $r_4 = -i$ și deci funcțiile

$$y_1 = x^{2x}; y_2 = x e^{2x}, y_3 = \cos x; y_4 = \sin x$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

Exemplu 2. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0$$

Ecuația caracteristică

$$r^5 - r^4 + 8r^3 - 8r^2 + 16r - 16 = 0$$

are rădăcinile

$$r_1 = 1; r_2 = r_3 = 2i; r_4 = r_5 = -2i$$

și deci funcțiile

$$y_1 = e^{2x}, y_2 = \sin x, y_3 = \cos x,$$

$$y_4 = x \cos x, y_5 = x \sin x$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x + C_4 x \cos x + C_5 x \sin x.$$

§ 5. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI, NEOMOGENE

Sînt de forma

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \quad (33)$$

unde $a_i (i = 1, \dots, n)$ sînt constante reale iar f este o funcție reală definită și continuă pe un interval $I \subset \mathbf{R}$.

Am văzut că soluția generală a unei astfel de ecuații este egală cu suma dintre soluția generală a ecuației omogene $L(y) = 0$ și o soluție particulară a sa.

O soluție particulară se poate găsi prin metoda variației constantelor, metodă care se aplică și în acest caz. În anumite cazuri se poate găsi o soluție particulară printr-un simplu calcul algebric. Menționăm în continuare câteva dintre ele.

a) Funcția f este un polinom de gradul m , adică

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \quad (34)$$

Dacă $a_n \neq 0$ ecuația diferențială (33) are o soluție particulară de forma

$$y_p = \lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m \quad (35)$$

coeficienții $\lambda_i (i = 0, 1, \dots, m)$ determinându-se prin identificare. În adevăr, dacă înlocuim soluția (35) în ecuația

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

și identificăm, obținem sistemul

$$a_n \lambda_0 = b_0$$

$$a_n \lambda_1 + m a_{n-1} \lambda_0 = b_1$$

$$a_n \lambda_2 + (m-1) a_{n-1} \lambda_1 + m(m-1) a_{n-2} \lambda_0 = b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

care permite aflarea coeficienților $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + y = x^2 + x$$

Soluția particulară este de forma

$$y_p = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

Înlocuim în ecuația dată și obținem

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + 2\lambda_0 + \lambda_2 = x^2 + x$$

Prin identificare obținem

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

Soluția generală a ecuației omogene

$$y'' + y = 0$$

este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ și deci soluția generală a ecuației diferențiale date este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2$$

b) Funcția f este un polinom de gradul m , adică

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m$$

și dacă $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-p+1} = 0$ iar $a_{n-p} \neq 0$, atunci ecuația diferențială (33) are o soluție particulară de forma

$$y_p = x^p(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m) \quad (36)$$

coeficienții $\lambda_i (i = 0, 1, \dots, m)$ determinându-se prin identificare. În adevăr, dacă luăm ca nouă funcție necunoscută pe

$$z = y^{(p)}$$

atunci ecuația (33) devine

$$z^{(n-p)} + a_1 z^{(n-p-1)} + \dots + a_{n-p} z = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \quad (37)$$

Aplicăm rezultatul stabilit la cazul a) și deci ecuația (37) admite o soluție particulară de forma

$$z_p = v_0 x^m + v_1 x^{m-1} + \dots + v_m$$

Integrînd apoi de p ori și neglijînd constanta de integrare de fiecare dată, obținem (36).

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + y' = x - 2$$

Soluția particulară este de forma

$$y_p = x(\lambda_0 x + \lambda_1)$$

Dacă înlocuim în ecuația dată și identificăm, obținem

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}; \quad \lambda_1 = -3,$$

deci soluția generală este

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x\left(\frac{x}{2} - 3\right)$$

c) Funcția f este de formă

$$y(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \quad (38)$$

Dacă α nu este rădăcină a ecuației caracteristice $k(r) = 0$ atunci ecuația diferențială (33) are o soluție particulară de forma

$$y_p = e^{\alpha x}(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m)$$

Dacă α este o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației caracteristice $k(r) = 0$, atunci ecuația diferențială (33) are o soluție particulară de forma

$$y_p = x^p e^{\alpha x}(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m)$$

Coeficienții $\lambda_i (i = 0, 1, \dots, m)$ se determină prin identificare. În adevăr, în acest caz ecuația (33) devine

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x} \cdot (b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \quad (39)$$

În ecuația (39) facem schimbarea de variabilă

$$y = z e^{\alpha x}$$

unde z este noua funcție necunoscută și ținem seama de identitatea (30)

Simplificăm cu $e^{\alpha x}$ și obținem ecuația

$$z^{(n)} + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \dots + \frac{f'(\alpha)}{1!} z' + f(\alpha) z = b_0 x^{m-1} + \dots + b_m$$

Dacă aplicăm rezultatele stabilite la punctele a) și b) obținem rezultatele enunțate la acest punct.

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - y = x e^{2x}$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 - 1 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, deci $\alpha = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. Soluția particulară este de forma

$$y_p = (\lambda_0 x + \lambda_1) e^{2x}$$

Dacă înlocuim în ecuația dată și identificăm obținem,

$$\lambda_0 = -\frac{1}{3} \quad \text{și} \quad \lambda_1 = -\frac{4}{9}$$

soluția generală este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \left(\frac{x}{3} + \frac{4}{9} \right) e^{2x}$$

Exemplu 2.

$$y'' - y = x e^x$$

În acest caz $\alpha = 1$ este rădăcină a ecuației caracteristice. Soluția particulară este de forma

$$y_p = x e^x (\lambda_0 x + \lambda_1) = e^x (\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x)$$

Dacă înlocuim în ecuația dată obținem

$$\lambda_0 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{4}$$

și deci soluția generală a ecuației considerate este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

d) Funcția f are una din următoarele două forme:

$$f(x) = e^{\alpha x}(C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m) \cos \beta x; \quad \beta \neq 0$$

sau

$$f(x) = e^{\alpha x}(C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m) \sin \beta x; \quad \beta \neq 0$$

Dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice $k(r) = 0$ atunci ecuația diferențială (33) are o soluție particulară de forma

$$y_p = e^{\alpha x}[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x] \quad (40)$$

unde $Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ sînt polinoame de gradul m ai căror coeficienți se determină prin indentificare.

Dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației caracteristice $k(r) = 0$, atunci ecuația diferențială (33) are o soluție particulară de forma

$$y_p = x^p \cdot e^{\alpha x}[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x] \quad (41)$$

unde $Q_1(x)$ și $Q_2(x)$ sînt polinoame de gradul m ai căror coeficienți se determină prin indentificare.

În adevăr, considerăm ecuațiile diferențiale

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x}(C_0 x^m + \dots + C_m) \cos \beta x$$

$$L(z) = z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} z' + a_n z = e^{\alpha x}(C_0 x^m + \dots + C_m) \sin \beta x$$

Dacă ținem seama de proprietățile operatorului L și de formula lui Euler, avem

$$L(y) + iL(z) = e^{\alpha x}(C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m) e^{i\beta x}$$

sau

$$L(y + iz) = e^{(\alpha + i\beta)x}(C_0 x^m + C_1 x^{m-1} + \dots + C_m)$$

Aplicînd rezultatele stabilite la punctul c) obținem rezultatele enunțate la acest punct.

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - 7y' + 6y = \sin x$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 - 7r + 6 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 1$ și $r_2 = 6$. În acest caz $\alpha = 0$ și $\beta = 1$ deci $\alpha + i\beta = i$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. Ecuația diferențială dată are o soluție particulară de forma

$$y_p = A \cos x + B \sin x$$

Scriind că y_p verifică ecuația dată, obținem:

$$-A \cos x - B \sin x - 7(-A \sin x + B \cos x) + 6(A \cos x + B \sin x) = \sin x$$

$$5B + 7A = 1; \quad 5A - 7B = 0 \text{ deci } A = \frac{7}{74}; \quad B = \frac{5}{74}$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \frac{7}{74} \cos x + \frac{5}{74} \sin x$$

Exemplu 2. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + 4y = x \sin 2x$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 + 4 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 2i$; $r_2 = -2i$. În acest caz $\alpha = 0$ și $\beta = 2$, deci $\alpha + i\beta = 2i$; este rădăcină simplă a ecuației caracteristice. Ecuația diferențială dată are o soluție particulară de forma

$$y_p = x[(Ax + B) \cos 2x + (Cx + D) \sin 2x]$$

Scriind că y_p verifică ecuația dată și făcînd indentificarea, obținem

$$y_p = -\frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x$$

Soluția generală căutată este

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x$$

§ 6. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A LUI EULER

Este o ecuație diferențială liniară de forma

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \quad (41)$$

unde a_i ($i = 1, \dots, n$) sînt constante reale iar f este o funcție reală, definită și continuă pe un interval $I \subset \mathbf{R}$; $x \neq 0$.

Prin schimbarea de variabilă

$$|x| = e^t$$

ecuația diferențială (41) se transformă într-o ecuație diferențială cu coeficienți constanți.

În adevăr, pentru $x > 0$, avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{1}{e^t} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} e^{-t} \right) = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$y''' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{1}{e^t} \frac{d}{dt} \left[e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right] = e^{-3t} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right)$$

În general obținem

$$y^{(n)} = e^{-nt} \Phi \left(\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n} \right)$$

unde Φ este o funcție liniară.

Observăm că:

$$xy' = \frac{dy}{dt}; \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}; \quad x^3 y''' = \frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt}$$

și în general

$$x^n y^{(n)} = \Phi \left(\frac{dy}{dt}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n} \right)$$

Dacă înlocuim produsele xy' , $x^2 y''$, $x^3 y'''$, ..., $x^n y^{(n)}$ în ecuația diferențială (41) obținem o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, de forma

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1 \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1} \frac{dy}{dt} + b_n y = f(e^t) \quad (42)$$

Folosind rezultatele stabilite pentru ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți, putem găsi soluția generală a ecuației diferențiale (42). În soluția generală a ecuației (42), înlocuim pe $t = \ln x$ și obținem soluția generală a ecuației diferențiale (41). Același rezultat se obține dacă $x < 0$.

Observația 1. Ecuația diferențială (41) poate fi integrată căutînd direct soluții de forma

$$y = |x|^r$$

Observația 2. Ecuația diferențială

$$(ax + b)^n y^{(n)} + a_1(ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_n(ax + b) y' + a_n y = f(x)$$

unde a , b și a_i ($i = 1, \dots, n$) sînt constante reale, poate fi transformată într-o ecuație diferențială cu coeficienți constanți dacă facem schimbarea de variabilă,

$$|ax + b| = e^t.$$

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$x^2 y'' - xy' - 3y = -\frac{16 \ln x}{x}, \quad x > 0$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = e^t$, avem

$$xy' = \frac{dy}{dt}; \quad x^2 y'' = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}$$

și dacă înlocuim în ecuația dată, obținem ecuația

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - 3y = -16te^{-t}$$

a cărei soluție generală este

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t} + 2t^2 e^{-t} + t e^{-t}$$

În această soluție înlocuim pe $t = \ln x$ și obținem soluția generală a ecuației date

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2 x^3 + 2 \frac{(\ln x)^2}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

PROBLEME

Să se integreze ecuațiile următoare, folosind soluția particulară indicată:

$$1) y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0; \quad y_1 = \frac{\sin x}{x}; \quad (x \neq 0)$$

$$R: y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x}$$

$$2) y'' \sin^2 x = 2y; \quad y_1 = \operatorname{ctg} x;$$

$$R: y = C_2 + (C_1 - C_2 x) \operatorname{ctg} x$$

$$3) y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0; \quad y_1 = x; \quad (x \neq 0);$$

$$R: \frac{1}{2} x \ln^2 |x| + C_1 x \ln |x| + C_2 x = y$$

$$4) y'' + \frac{2}{x} y' + y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}; \quad y_1 = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$R: y = C_1 \frac{\sin x}{x} + C_2 \frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|$$

Să se integreze ecuațiile următoare

$$5) y'' + y = \operatorname{tg} x; \quad R: y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \cos x \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$6) y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x;$$

$$R: y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln |\operatorname{tg} 2x|$$

$$7) y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = 2$$

$$R: y = e^x + \sin x.$$

$$8) y'' - y = \operatorname{ch} 2x; \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$R: y = -\frac{1}{3} e^x + \frac{1}{3} \operatorname{ch} x + \frac{1}{6} \operatorname{sh} 2x$$

$$9) y'' + y = x e^x + 2e^{-x};$$

$$R: y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2} (x-1) e^x + e^{-x}$$

$$10) y''' + y'' - 2y' = x - e^x;$$

$$R: y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{4} x(x+1) - \frac{1}{3} x e^x$$

$$11) y'' - y = x \cos^2 x;$$

$$R: y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{10} x \cos 2x + \frac{2}{25} \sin 2x$$

$$12) y'' + 4y = x \sin 2x;$$

$$R: y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x.$$

$$13) y^{(IV)} - 16y = 4 e^{-2x} \cos 2x$$

$$R: y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{1}{20} e^{-2x} \cos 2x$$

$$14) y'' - 2y' + 2y = 2 e^x \cos x - 4x e^x \sin x$$

$$R: y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x.$$

$$15) y''' - 3y'' + 3y' - y = x e^x$$

$$R: y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + \frac{x^4}{24} e^x$$

$$16) y^{(iv)} + 2y'' + y = \sin x;$$

$$R: y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \sin x$$

$$17) x^2 y'' - 3x y' + 3y = 3 \ln^2 x; \quad (x > 0)$$

$$R: y = C_1 x + C_2 x^2 + \frac{1}{9} (9 \ln^2 x + 24 \ln x + 26)$$

$$18) \quad x^2 y'' + x y' + y = \sin(2 \ln x); \quad (x > 0)$$

$$R: y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \frac{1}{3} \sin(2 \ln x)$$

$$19) \quad (4x - 1)^2 y'' - 2(4x - 1) y' + 8y = 0; \quad (4x > 1)$$

$$R: y = C_1(4x - 1) + C_2 \sqrt{4x - 1}$$

$$20) \quad x^3 y''' - x^2 y'' + 2x y' - 2y = x^3 + 2x; \quad (x \neq 0)$$

$$R: y = C_1 |x| + C_2 |x| \ln |x| + C_3 x^2 - x \ln^2 |x| + \frac{x^3}{4}$$

$$21) \quad (x + 1)^3 y'' + 3(x + 1)^2 y' + (x + 1) y = 6 \ln(x + 1); \quad (x > -1)$$

$$R: y = \frac{1}{x + 1} + C_2 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} + \frac{\ln^3(x + 1)}{x + 1}$$

CAPITOLUL XV

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE

Am arătat la §3. cap. XII că studiul unui sistem de ecuații diferențiale de ordin superior, sub formă normală, se poate reduce la studiul unui sistem de ordinul întâi. Vom considera în continuare numai sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întâi sub forma normală.

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

unde variabila independentă este x iar funcțiile necunoscute sînt

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

Funcțiile reale f_i ($i = 1, \dots, n$) de argumente $x, y_1, \dots, y_n$ sînt definite și continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

La §4. cap. XII am arătat că studiul unei ecuații diferențiale de ordinul n , sub formă normală

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

se poate reduce la studiul unui sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi. Se poate afirma că în general și reciproc este adevărat: studiul unui sistem de ecuații diferențiale de forma (1) se poate reduce la studiul unei ecuații diferențiale de forma (2).

Demonstrăm această afirmație în cazul $n = 3$. Fie dat sistemul

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{3}$$

Derivăm prima ecuație din (3), în raport cu x ,

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} y_3'$$

Vom nota

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Prin definiție

$$y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Dacă ținem seama de rezultatele generale ale algebrei liniare și ale calculului cu matrice, sistemul (6) poate fi scris sub forma

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

sau

$$y' = A(x)y + f(x) \quad (7)$$

Dacă

$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) \equiv 0$ pe intervalul I , atunci sistemul (6) devine

$$\begin{cases} y'_1 = a_{11}(x) y_1 + a_{12}(x) y_2 + \dots + a_{1n}(x) y_n \\ y'_2 = a_{21}(x) y_1 + a_{22}(x) y_2 + \dots + a_{2n}(x) y_n \\ \dots \\ y'_n = a_{n1}(x) y_1 + a_{n2}(x) y_2 + \dots + a_{nn}(x) y_n \end{cases} \quad (8)$$

și se numește sistem omogen. Dacă folosim scrierea matricială sistemul (8) se poate pune sub forma

$$y' = A(x)y \quad (9)$$

În continuare ne vom ocupa de sistemele omogene.

Teorema 1.2. Dacă

$$z_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad z_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

Funcția y dată de (10) este soluție a sistemului (9) și conține n constante arbitrare. Vom stabili în continuare condițiile pe care trebuie să le îndeplinească n soluții $z_1, z_2, \dots, z_n$ ale sistemului (9) astfel încît orice soluție a sistemului (9) să se obțină din (10) prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$.

În acest scop este necesară următoarea

Definiție 1.1. Fie $z_1, z_2, \dots, z_n$; n funcții vectoriale

$$z_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{in} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (12)$$

definite și continue pe intervalul I .

Spunem că aceste n funcții sînt liniar independente pe intervalul I dacă nu există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel încît să avem

$$\lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \dots + \lambda_n z_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$.

Dacă există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nu toate nule astfel încît să avem

$$\lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \dots + \lambda_n z_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$, atunci spunem că cele n funcții sînt liniar dependente pe I .

Teorema 3.1. Dacă funcțiile vectoriale $z_1, z_2, \dots, z_n$ date la (12), definite și continue pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$, sînt în dependență liniară pe I atunci determinantul

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \dots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \dots & y_{n2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I$$

este nul pe intervalul I .

Demonstrație. Funcțiile $z_1, z_2, \dots, z_n$ fiind presupuse în dependență liniară pe I , există numerele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel încît

$$\lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \dots + \lambda_n z_n(x) = 0 \quad (13)$$

pentru orice $x \in I$. Egalitatea (13) se poate pune sub forma

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{12}(x) \\ \vdots \\ y_{1n}(x) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_{21}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{2n}(x) \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ y_{n2}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 3.3. Fie dat sistemul omogen

$$y' = A(x)y \quad (9)$$

unde funcțiile a_{ij} , elementele matricei $A(x)$, sînt continue pe intervalul I . Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt n soluții ale sistemului (9) și dacă ele formează un sistem fundamental de soluții pe intervalul I , atunci soluția generală a sistemului (9) este dată de egalitatea

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n \quad (20)$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sînt constante arbitrare.

Demonstrație. Când $x \in I$ sistemul (9) satisface condițiile din teorema de existență și unicitate. Deci există și este unică soluția sistemului (9) care satisface condițiile inițiale:

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}; \quad x_0 \in I \quad (21)$$

Dacă notăm

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

atunci condițiile inițiale (21) pot fi scrise sub formă vectorială

$$y(x_0) = y_0 \quad (22)$$

Pentru a dovedi că soluția (20) este soluția generală a sistemului (9) trebuie să arătăm că putem determina constantele $C_1, C_2, \dots, C_n$, astfel încât condiția (22) să fie îndeplinită. Dacă punem condiția

$$C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + \dots + C_n z_n(x_0) = y_0$$

și ținem seama de (2.1) obținem

$$C_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x_0) \\ y_{12}(x_0) \\ \vdots \\ y_{1n}(x_0) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_{21}(x_0) \\ y_{22}(x_0) \\ \vdots \\ y_{2n}(x_0) \end{pmatrix} + \dots + C_n \begin{pmatrix} y_{n1}(x_0) \\ y_{n2}(x_0) \\ \vdots \\ y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

de unde obținem sistemul

[illegible]

Determinantul sistemului (23) este tocmai $W(x_0)$ care prin ipoteză este diferit de zero și deci sistemul are soluție unică. Teorema este demonstrată.

Observația 1. Din teorema 3.3 rezultă că numărul maxim de soluții liniar independente pe I , pentru sistemul (9), este egal cu n .

Observația 2. Tot din teorema 3.3 rezultă că problema integrării sistemelor liniare și omogene (9) se reduce la găsirea a n soluții care să formeze un sistem fundamental de soluții.

Exemplu. Să se afle soluția generală a sistemului

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1$$

Dacă eliminăm pe y_2 obținem ecuația

$$y_1'' + y_1 = 0$$

deci

$$z_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2; \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Obținem soluția generală

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \quad y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

§ 4. SOLUȚIA GENERALĂ A SISTEMULUI $y' = A(x)y + f(x)$

Fie sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întâi

$$y' = A(x)y + f(x) \quad (7)$$

unde funcțiile a_{ij} (elementele matricei $A(x)$) și f_i (componentele funcției f) sînt definite și continue pe un același interval $I \subset \mathbf{R}$. În aceste condiții are loc

Teorema 1.4. Soluția generală a sistemului (7) se obține adăugînd la soluția generală a sistemului omogen

$$y' = A(x)y \quad (9)$$

o soluție particulară, oarecare, a sistemului neomogen (7).

Demonstrație. Fie y_p o soluție particulară a sistemului (7) deci

$$y_p' = A(x)y_p + f(x), \quad x \in I$$

Facem schimbarea de variabilă

$$y = z + y_p$$

unde z este noua funcție (vectorială) necunoscută, avem

$$(z + y_p)' = A(x)(z + y_p) + f(x)$$

sau

$$z' + y'_p = A(x)z + A(x)y_p + f$$

Dacă ținem seama că y_p este soluție a sistemului (7), obținem

$$z' = A(x)z$$

Sistemul $y' = A(x)y$ (sau $z' = A(x)z$) se numește sistemul omogen atașat sistemului neomogen (7). Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ este un sistem fundamental de soluții ale sistemului omogen (9) atunci soluția generală a sistemului neomogen (7) este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n + y_p \quad (24)$$

În adevăr, dacă ținem seama de definiția soluției generale, pentru un sistem de ecuații diferențiale și dacă folosim procedeul dat în demonstrația teoremei 3.3, rezultă că funcția dată la (24) este soluția generală a sistemului (7).

Din teorema 1.4. rezultă că pentru a afla soluția generală a sistemului neomogen

$$y' = A(x)y + f(x) \quad (7)$$

este suficient să cunoaștem un sistem fundamental de soluții ale sistemului omogen.

$$y' = A(x)y$$

și o soluție particulară a sistemului neomogen (9). Aflarea unei soluții particulare a sistemului neomogen (7) este o problemă în general dificilă. Dacă nu cunoaștem o soluție particulară a sistemului (7) dar cunoaștem soluția generală a sistemului omogen (9) se poate afla soluția generală a sistemului (7) prin metoda variației constantelor. Vom arăta că soluția generală a sistemului (7) se obține cu ajutorul acestei metode prin n cuadraturi. Fie $z_1, z_2, \dots, z_n$ un sistem fundamental de soluții ale sistemului omogen (9) atunci soluția sa generală este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n \quad (25)$$

Vom căuta soluția generală a sistemului neomogen (7) de aceeași formă cu soluția generală (25) a sistemului omogen (9) înlocuind constantele arbitrare $C_1, C_2, \dots, C_n$ cu funcții reale derivabile, depinzând de x . Notăm aceste funcții cu $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Prin urmare soluția generală a sistemului neomogen (7) o căutăm de forma

$$y = C_1(x) z_1(x) + C_2(x) z_2(x) + \dots + C_n(x) z_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i(x) \quad (26)$$

Punem condiția ca y să verifice sistemul (7); obținem

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) z_i(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) z'_i(x) = A(x) \sum_{i=1}^n C_i(x) z_i(x) + f(x)$$

sau

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) z_i(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) z'_i(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) A(x) z_i(x) + f(x)$$

unde a_{ij} sînt constante reale, se numește sistem de n ecuații diferențiale liniare cu n necunoscute, cu coeficienți constanți, omogen. Dacă reducem studiul sistemului (28) la studiul unei ecuații diferențiale de ordinul n se vede că se obține o ecuație liniară cu coeficienți constanți. Este deci firesc să căutăm soluțiile sistemului (28) de forma

$$y_1 = \alpha_1 e^{rx}; y_2 = \alpha_2 e^{rx}, \dots, y_n = \alpha_n e^{rx} \quad (29)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ și r sînt constante. Dacă punem condiția ca sistemul (28) să aibă o soluție de forma (29) obținem, în urma simplificării cu e^{rx} , un sistem algebric omogen cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\begin{aligned}(a_{11} - r)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - r)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n &= 0 \\ \dots & \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - r)\alpha_n &= 0\end{aligned}\tag{30}$$

Ne interesează soluțiile nebanale ale sistemului (30). Din teorema lui Rouché rezultă că sistemul (30) admite soluții diferite de cea banală dacă și numai dacă determinantul sistemului (30) este zero:

$$D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0 \quad (31)$$

Ecuatia $D(r) = 0$ se numește ecuația caracteristică a sistemului (28). În afara determinantului $D(r)$ considerăm și matricea $M(r)$ formată din aceleași elemente

$$M(r) = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - r \end{pmatrix} \quad (32)$$

Ecuatia caracteristică (31), $D(r) = 0$, este o ecuație de gradul n în r . În legătură cu rădăcinile ecuației caracteristice (31) considerăm două cazuri:

a) Ecuația caracteristică $D(r) = 0$ are toate rădăcinile distincte. Fie $r_1, r_2, \dots, r_n$ aceste rădăcini și deci $D(r_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$. În acest caz cel puțin unul dintre minorii de ordinul $n-1$ ai determinantului $D(r_i)$ este diferit de zero. În adevăr, deoarece r_i este rădăcină simplă a ecuației (31), avem $D'(r_i) \neq 0$. Dar

$$D'(r) = - \begin{vmatrix} a_{22} - r & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - r & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} - r & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} - r \end{vmatrix} - \dots - \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - r & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} - r \end{vmatrix} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & (a_{11} - r_i) \alpha_{i1} + a_{12}\alpha_{i2} + \dots + a_{1n}\alpha_{in} = 0 \\ & a_{21}\alpha_{i1} + (a_{22} - r_i) \alpha_{i2} + \dots + a_{2n}\alpha_{in} = 0 \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{n1}\alpha_{i1} + a_{n2}\alpha_{i2} + \dots + (a_{nn} - r_i) \alpha_{in} = 0 \end{aligned} \tag{34}$$
$$\alpha_{i1} = A_i k_{i1}, \alpha_{i2} = A_i k_{i2}, \dots, \alpha_{in} = A_i k_{in}$$
$$z_i = \begin{pmatrix} k_{i1} e^{r_{i1}x} \\ k_{i2} e^{r_{i2}x} \\ \vdots \\ k_{in} e^{r_{in}x} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \dots, n)$$
$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n$$
$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 k_{11} e^{r_1 x} + C_2 k_{21} e^{r_2 x} + \dots + C_n k_{n1} e^{r_n x} \\ y_2 &= C_1 k_{12} e^{r_1 x} + C_2 k_{22} e^{r_2 x} + \dots + C_n k_{n2} e^{r_n x} \\ &\vdots \\ y_n &= C_1 k_{1n} e^{r_1 x} + C_2 k_{2n} e^{r_2 x} + \dots + C_n k_{nn} e^{r_n x} \end{aligned}$$

Dacă ecuația caracteristică $D(r) = 0$ admite o rădăcină simplă și complexă $r_1 = \alpha + i\beta$, atunci ea admite și rădăcina $r_2 = \alpha - i\beta$. Soluțiile sistemului (28) corespunzătoare celor două rădăcini complexe vor fi

$$z_1 = \begin{pmatrix} k_{11} e^{(\alpha+i\beta)x} \\ k_{12} e^{(\alpha+i\beta)x} \\ \vdots \\ k_{1n} e^{(\alpha+i\beta)x} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} k_{21} e^{(\alpha-i\beta)x} \\ k_{22} e^{(\alpha-i\beta)x} \\ \vdots \\ k_{2n} e^{(\alpha-i\beta)x} \end{pmatrix}$$

unde coeficienții k_{1j} și k_{2j} ($j = 1, \dots, n$) sînt numere complexe conjugate:

$$k_{1j} = l_{1j} + il_{2j}; \quad k_{2j} = l_{1j} - il_{2j}$$

Soluția z_1 a sistemului (28), devine

$$\begin{aligned} z_1 &= e^{(\alpha + i\beta)x} \begin{pmatrix} l_{11} + il_{21} \\ l_{12} + il_{22} \\ \dots \dots \dots \\ l_{1n} + il_{2n} \end{pmatrix} = e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) \begin{pmatrix} l_{11} + il_{21} \\ l_{12} + il_{22} \\ \dots \dots \dots \\ l_{1n} + il_{2n} \end{pmatrix} = \\ &= e^{\alpha x} \begin{pmatrix} l_{11} \cos \beta x - l_{21} \sin \beta x \\ l_{12} \cos \beta x - l_{22} \sin \beta x \\ \dots \dots \dots \\ l_{1n} \cos \beta x - l_{2n} \sin \beta x \end{pmatrix} + i e^{\alpha x} \begin{pmatrix} l_{11} \sin \beta x + l_{21} \cos \beta x \\ l_{12} \sin \beta x + l_{22} \cos \beta x \\ \dots \dots \dots \\ l_{1n} \sin \beta x + l_{2n} \cos \beta x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dacă notăm $z_1 = \tilde{z}_1 + i\tilde{z}_2$ și aplicăm teorema 2.2 rezultă că $\tilde{z}_1$ și $\tilde{z}_2$ sînt soluțiile reale ale sistemului (28). Același rezultat se obține dacă lucrăm cu z_2 .

b) Ecuația caracteristică $D(r) = 0$ are și rădăcini multiple.

Fie r_1 o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației caracteristice (31). În acest caz $D^{(p)}(r_1) \neq 0$. Un raționament asemănător cu cel de la cazul a) ne duce la concluzia că printre minorii de ordinul $n - p$ ai determinantului $D(r_1)$ cel puțin unu este diferit de zero. Dacă notăm cu m rangul matricei $M(r_1)$ atunci deducem că $m \geq n - p$. Sistemul de ecuații (30), unde $r = r_1$ are m ecuații independente și deci $n - m$ necunoscute rămîn arbitrare. Fie

$$\alpha_1 = C_1, \alpha_2 = C_2, \dots, \alpha_{n-m} = C_{n-m}$$

Celelalte m necunoscute ale sistemului (30) se exprimă liniar funcție de $C_1, C_2, \dots, C_{n-m}$:

$$\alpha_j = k_{1j}C_1 + k_{2j}C_2 + \dots + k_{n-m,j}C_{n-m}; \quad (j = n - m + 1, \dots, n)$$

Dacă luăm $C_i = 1$ pentru $i = 1, 2, \dots, n - m$, iar $C_j = 0$ pentru $j \neq i$ obținem pentru sistemul de ecuații diferențiale (28), următoarele $n - m$ soluții:

$$z_1 = e^{r_1 x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{1, n-m+1} \\ \vdots \\ k_{1, n} \end{pmatrix}; \quad z_2 = e^{r_1 x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ k_{2, n-m+1} \\ \vdots \\ k_{2, n} \end{pmatrix}; \quad \dots z_{n-m} = e^{r_1 x} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ k_{n-m, n-m+1} \\ \vdots \\ k_{n-m, n} \end{pmatrix}$$

Se vede imediat că aceste $n - m$ soluții sînt liniar independente.

Dacă $m = n - p$, adică rangul matricei $M(r_1)$ are valoarea minimă, obținem pentru sistemul (28) un număr de soluții liniar independente egal cu p (ordinul de multiplicitate al rădăcinii r_1). În acest caz se obțin toate soluțiile corespunzătoare acestei rădăcini. Dacă $m > n - p$, numărul $n - m$ de soluții obținute prin metoda de mai sus va fi mai mic decît p (ordinul de multiplicitate al rădăcinii r_1). Pentru a găsi toate soluțiile corespunzătoare

lui r_1 , căutăm pentru sistemul (28) soluții sub formă de combinații liniare ale funcțiilor

$$e^{r_1 x}, x e^{r_1 x}, \dots, x^{p-1} e^{r_1 x}$$

adică de forma

$$y_1 = P_1(x) e^{r_1 x}, y_2 = P_2(x) e^{r_1 x}, \dots, y_n = P_n(x) e^{r_1 x}$$

unde $P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$ sînt polinoame de gradul $p-1$ ai căror coeficienți se determină prin identificare.

Exemplul 1. Să se afle soluția generală a sistemului

$$y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3$$

$$y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (r-2)(r-3)(r-6) = 0$$

și deci rădăcinile ecuației sînt $r_1 = 2, r_2 = 3, r_3 = 6$.

În cazul $r_1 = 2$, sistemul algebric (30), devine

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

și putem lua $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1$

În cazul $r_2 = 3$, sistemul (30) devine

$$-\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

și putem lua $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 1$.

În cazul $r_3 = 6$ sistemul (30) devine

$$-3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$$

și putem lua $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 1$.

Obținem în acest fel trei soluții ale sistemului considerat

$$z_1 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}; \quad z_3 = \begin{pmatrix} e^{6x} \\ -2e^{6x} \\ e^{6x} \end{pmatrix}$$

și deci soluția generală este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

sau

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}$$

$$y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{6x}$$

$$y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{6x}$$

Exemplul 2. Să se afle soluția generală a sistemului

$$y'_1 = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

$$y'_2 = -10y_1 + 6y_2 + 8y_3$$

$$y'_3 = 3y_1 - y_2 - 2y_3$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^3 - 2r^2 + 2r = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 0$, $r_2 = 1 + i$, $r_3 = 1 - i$.

Dacă înlocuim pe $r_1 = 0$ în sistemul (30), obținem

$$-2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$-10\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

Putem lua $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; $\alpha_3 = 1$.

Dacă înlocuim $r_2 = 1 + i$ în sistemul (30), obținem

$$(-3 - i)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$-10\alpha_1 + (5 - i)\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 + (-3 - i)\alpha_3 = 0$$

Putem lua $\alpha_1 = -1 + i$; $\alpha_2 = -2i$; $\alpha_3 = i$ și atunci

$$\begin{aligned} z_2 &= e^{(1+i)x} \begin{pmatrix} -1 + i \\ -2i \\ i \end{pmatrix} = e^x (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} -1 + i \\ -2i \\ i \end{pmatrix} = \\ &= e^x \begin{pmatrix} -\cos x - \sin x \\ -2 \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + i e^x \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \tilde{z}_2 + i \tilde{z}_3 \end{aligned}$$

Avem

$$z_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

și deci soluția generală a sistemului este

$$y = C_1 z_1 + C_2 \tilde{z}_2 + C_3 \tilde{z}_3$$

sau

$$y_1 = \frac{C_1}{2} + C_2 e^x (-\cos x - \sin x) + C_3 e^x (\cos x - \sin x)$$

$$y_2 = -\frac{C_1}{2} - 2C_2 e^x \cos x - 2C_3 e^x \sin x$$

$$y_3 = C_1 - C_2 e^x \sin x + C_3 e^x \cos x$$

Exemplul 3. Să se afle soluția generală a sistemului

$$y'_1 = y_2 + y_3$$

$$y'_2 = y_3 + y_1$$

$$y'_3 = y_1 + y_2$$

În acest caz ecuația caracteristică (31) este

$$D(r) = \begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = -(r^3 - 3r - 2) = 0; \quad r_1 = 2, r_2 = r_3 = -1$$

Dacă înlocuim pe r_1 în sistemul (30) obținem

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0; \quad -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0; \quad -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

și putem lua $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

Rădăcina $r_2 = -1$ este dublă pentru ecuația caracteristică $D(r) = 0$. În acest exemplu $n = 3$, $p = 2$ și evident $m = 1$ (rangul matricei $M(r_2)$). Dacă înlocuim r_2 în sistemul (30) obținem trei ecuații identice

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Dacă luăm $\alpha_2 = -1$ și $\alpha_3 = 0$ obținem $\alpha_1 = 1$. Dacă luăm $\alpha_2 = 0$ și $\alpha_3 = -1$ obținem $\alpha_1 = 1$. Avem deci soluțiile

$$z_1 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad z_3 = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

și deci soluția generală, scrisă vectorial, este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

sau

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}$$

$$y_2 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$$

$$y_3 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x}$$

Exemplul 4. Să se afle soluția generală a sistemului

$$y'_1 = -y_1 + y_2$$

$$y'_2 = -y_2 + 4y_3$$

$$y'_3 = y_1 - 4y_3$$

În acest caz ecuația caracteristică (31) este

$$D(r) = \begin{vmatrix} -1-r & 1 & 0 \\ 0 & -1-r & 4 \\ 1 & 0 & -4-r \end{vmatrix} = -r(r+3)^2 = 0, \quad r_1 = 0;$$

$$r_2 = r_3 = -3$$

Dacă înlocuim pe r_1 în sistemul (30) obținem

$$-\alpha_1 + \alpha_2 = 0; \quad -\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0; \quad \alpha_1 - 4\alpha_3 = 0$$

și putem lua

$$\alpha_1 = 4; \quad \alpha_2 = 4; \quad \alpha_3 = 1$$

Rădăcina $r_2 = -3$ este dublă pentru ecuația caracteristică $D(r) = 0$.
Avem

$$M(-3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

și se vede imediat că $m = 2$ (rangul matricei $M(-3)$). În acest caz, căutăm pentru sistemul dat soluții de forma

$$y_1 = e^{-3x}(A_1 + A_2 x); \quad y_2 = e^{-3x}(B_1 + B_2 x);$$

$$y_3 = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$$

Dacă înlocuim pe y_1, y_2, y_3 în sistemul dat și simplificăm cu e^{-3x} obținem

$$-3A_1 - 3A_2 x + A_2 + A_1 + A_2 x - B_1 - B_2 x = 0$$

$$-3B_1 - 3B_2 x + B_2 + B_1 + B_2 x - 4C_1 - 4C_2 x = 0$$

$$-3C_1 - 3C_2 x + C_2 + 4C_1 + 4C_2 x - A_1 - A_2 x = 0$$

Prin identificare obținem

$$\begin{aligned} -2A_1 + A_2 - B_1 &= 0 & -2A_2 - B_2 &= 0 \\ -2B_1 + B_2 - 4C_1 &= 0 & -2B_2 - 4C_2 &= 0 \\ C_1 + C_2 - A_1 &= 0 & C_2 - A_2 &= 0 \end{aligned}$$

În sistemul al doilea putem lua $A_2 = 1$; $B_2 = -2$; $C_2 = 1$. Înlocuim aceste valori în primul sistem și putem lua $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = 0$. Am obținut în acest fel, pentru sistemul dat următoarele soluții:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; z_2 = \begin{pmatrix} e^{-3x} \\ -e^{-3x} \\ 0 \end{pmatrix}; z_3 = \begin{pmatrix} xe^{-3x} \\ -2xe^{-3x} \\ xe^{-3x} \end{pmatrix}$$

Soluția generală, scrisă vectorial, este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

sau

$$\begin{aligned} y_1 &= 4C_1 + C_2 e^{-3x} + C_3 x e^{-3x} \\ y_2 &= 4C_1 - C_2 e^{-3x} - 2C_3 x e^{-3x} \\ y_3 &= C_1 + C_3 x e^{-3x} \end{aligned}$$

§ 6. STUDIUL SISTEMELOR CU AJUTORUL FUNCȚIILOR DE MATRICE

Șiruri și serii de matrice

Notăm cu M_n mulțimea matricelor pătrate de ordinul n , cu elemente reale sau complexe. Se verifică imediat că M_n este un spațiu linear (vectorial) față de operațiile obișnuite de adunare a matricelor și de înmulțire a unei matrice cu un scalar (real sau complex).

Fie $A \in M_n$; $E \in M_n$; $0 \in M_n$;

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij});$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \text{ matricea unitate}$$

$$\text{unde } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ matricea zero}$$

Definiție 1.6. Prin norma unei matrice $A \in M_n$ și o notăm cu $\|A\|$, înțelegem numărul real dat de egalitatea

$$\|A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

Norma introdusă pe M_n verifică proprietățile generale ale unei norme. În adevăr, are loc

Teorema 1.6. Dacă A și $B \in M_n$ atunci au loc

1) $\|A\| > 0$; $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in M_n$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$; λ scalar (real sau complex)

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

și

4) $|a_{ij}| \leq \|A\|$;

5) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ (35)

Demonstrație

1) Rezultă imediat din definiția normei

2) $\|\lambda A\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = |\lambda| \|A\|$

3) $\|A + B\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| = \|A\| + \|B\|$

4) Rezultă imediat

5) $\|AB\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \|B\| = \|A\| \|B\|$

Dacă în inegalitatea (35) luăm $A = B$, atunci $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Se arată imediat, prin inducție, că

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m \quad (\forall) \quad m \in \mathbb{N} \quad (36)$$

Fie $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ un șir de matrice din M_n și $A \in M_n$;

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}); \quad A = (a_{ij})$$

Definiție 2.6. Spunem că șirul de matrice $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent și are limita A , dacă

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \quad (\forall) \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

În acest caz scriem $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{(k)} = A$

Definiție 3.6. Spunem că seria de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \quad (37)$$

este convergentă și are suma A , dacă șirul sumelor parțiale

$$S_m = \sum_{k=0}^m A^{(k)}$$

este convergent și are limita A . În acest caz scriem

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A$$

Definiție 4.6. Spunem că seria de matrice (37) este absolut convergentă dacă seria numerică

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^{(k)}\| \quad (38)$$

este convergentă.

Teorema 2.6. Dacă seria de matrice (37) este absolut convergentă ea este convergentă.

Demonstrație. Din inegalitatea 4) dată de teorema 1.6. rezultă

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \|A^{(k)}\|; (\forall) k \in \mathbb{N} \text{ și } (\forall) i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Dar convergența seriei numerice (38) atrage după sine convergența seriilor

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|; (\forall) i, j = 1, \dots, n$$

Deci fiecare serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) este convergentă și dacă ținem seama de definiția dată convergenței unei serii de matrice, rezultă convergența seriei (37)

Exponențiala unei matrice

Fie A o matrice oarecare pătratică, de ordinul n cu elemente reale sau complexe. Considerăm seria de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}; (A^0 = E) \quad (39)$$

Arătăm că seria (39) este convergentă. În adevăr, dacă ținem seama de inegalitatea (36) avem

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}; (\forall) k \in \mathbb{N}$$

Seria numerică $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$, este convergentă ($\forall$) $a \in \mathbf{R}$, în particular și seria numerică

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

este convergentă. Prin simpla aplicare a teoremei 2.6. deducem că seria (39) este convergentă oricare ar fi $A \in M_n$.

Definiție 5.6. Suma seriei (39) se notează cu e^A și se numește exponențiala matricei A , deci

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (40)$$

Observație. Dacă matricea A are toate elementele reale, atunci matricea e^A are toate elementele reale.

Proprietățile exponențialei

1) Se vede imediat că $e^0 = E$, $e^E = eE$; (0 și $E \in M_n$).

2) Matricea $A \in M_n$ (fixată) poate fi înmulțită cu un număr real x , deoarece fiecare element al matricei

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x^k$$

este o serie de puteri convergentă pe toată axa reală.

Dacă ținem seama de proprietățile seriilor de puteri și de definiția derivatei unei matrice [dacă $A(x) = (a_{ij}(x))$, atunci $A'(x) = (a'_{ij}(x))$] rezultă că funcția matricială

$$x \rightarrow e^{Ax}; \quad x \in \mathbf{R}$$

este derivabilă și avem

$$(e^{Ax})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1} \right) A$$

adică

$$(e^{Ax})' = A e^{Ax} = e^{Ax} A$$

Se arată imediat, prin inducție că au loc egalitățile

$$(e^{Ax})^{(m)} = A^m e^{Ax} = e^{Ax} A^m; \quad m \in \mathbf{N} \quad (41)$$

3) Fie matricea $A \in M_n$ (fixată) și două numere reale x_1 și x_2 atunci

$$e^{A(x_1+x_2)} = e^{Ax_1} e^{Ax_2}$$

dacă considerăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}.$$

atunci sistemul (46) și condițiile inițiale (47) se scriu prescurtat

$$y' = Ay; \text{ respectiv } y(x_0) = y_0$$

Teorema 3.6. Funcția

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0 \quad (48)$$

este soluția sistemului (46) care satisface condițiile inițiale (47).

Demonstrație. În adevăr, din

$$y' = Ay$$

rezultă

$$y'' = Ay' = A^2 y$$

și în general

$$y^{(k)} = A^k y$$

dacă ținem seama de condiția $y(x_0) = y_0$, deducem

$$y^{(k)}(x_0) = A^k y(x_0) = A^k y_0$$

și scriind dezvoltarea în serie Taylor a lui y în jurul punctului x_0 , avem

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} y^{(k)}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} A^k y_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(x-x_0))^k}{k!} y_0$$

adică

$$y(x) = e^{A(x-x_0)} y_0$$

Dacă ținem seama de proprietatea 1, avem

$$y(x_0) = e^0 y_0 = E y_0 = y_0$$

deci funcția $y(x)$ dată la (48) este soluție a sistemului (46) și ea satisface condițiile inițiale date.

Observație. Dacă considerăm matricea

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sînt constante reale și arbitrare atunci soluția generală, sub formă matricială, a sistemului (46) este

$$y = e^{Ax} C \quad (48')$$

Pentru $x = 0$ obținem $y(0) = e^0 C = EC = C$ și deci

$$y(x) = e^{Ax} y(0)$$

Teorema 4.6. Fie $A, B \in M_n$, două matrici cu toate elementele reale cu proprietatea că $AB = BA$, atunci

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Demonstrație. Din condiția $AB = BA$ rezultă

$$A^2 B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = BA^2,$$

deci B permută cu A^2 ,

Rezultă imediat, prin inducție, că $A^k B = BA^k$ și deci

$$e^A B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) B = B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) = B e^A$$

considerăm funcția

$$F(x) = e^{(A+B)x} - e^{Ax} e^{Bx}; \quad x \in \mathbf{R}$$

Avem

$$\begin{aligned} F'(x) &= (A+B) e^{(A+B)x} - A e^{Ax} e^{Bx} - e^{Ax} B e^{Bx} = \\ &= (A+B) e^{(A+B)x} - A e^{Ax} e^{Bx} - B e^{Ax} e^{Bx} = (A+B) F(x) \end{aligned}$$

În acest fel am dedus că funcția F este soluție a sistemului

$$y' = (A+B) y$$

Din observația precedentă rezultă că

$$F(x) = e^{(A+B)x} F(0)$$

dar $F(0) = E - EE = 0$ și deci $F(x) = 0$; ($\forall$) $x \in \mathbf{R}$, în particular

$$F(1) = 0, \text{ deci } e^{A+B} = e^A e^B$$

Calculul matricei e^A

Se pune problema calculării matricei e^A . Calculul pe baza definiției este, în general, destul de dificil. Folosind unele rezultate din algebra liniară vom arăta că aflarea matricei e^A revine la efectuarea unor operațiuni algebrice.

Dacă B este o matrice pătratică de ordinul n cu toate elementele reale și nesară (det. $B \neq 0$) am arătat că are loc egalitatea

$$B^{-1} e^A B = e^{B^{-1} A B} \quad (43)$$

de unde obținem

$$e^A = B \cdot e^{B^{-1} A B} B^{-1}$$

Vom căuta matricea B astfel încât matricea

$$e^{B^{-1} A B}$$

să aibă o formă cât mai simplă.

Amintim că valorile proprii ale matricei A sînt date de ecuația

$$\det(A - rE) = 0$$

În legătură cu valorile proprii ale matricei A distingem două cazuri

a) dacă matricea A are valorile proprii distincte, există o matrice B nesingulară astfel ca matricea

$$B^{-1}AB = A^* \text{ (notație)}$$

să aibă formă diagonală:

$$A^* = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

Pentru prescurtarea scrierii, folosim notația

$$A^* = [r_1, r_2, \dots, r_n]$$

Avem, evident

$$(A^*)^k = \begin{pmatrix} r_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & r_n^k \end{pmatrix} = [r_1^k, r_2^k, \dots, r_n^k]$$

Obținem

$$\begin{aligned} e^{A^*} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^*)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{r_1^k}{k!}, \frac{r_2^k}{k!}, \dots, \frac{r_n^k}{k!} \right] = \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_2^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_n^k}{k!} \right] = [e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_n}] = \\ &= \begin{pmatrix} e^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Deci soluția $y(x)$ este, în acest caz, dată de egalitatea

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{A(x-x_0)} y_0 = B e^{B^{-1}AB(x-x_0)} B^{-1} y(x_0) = \\ &= B e^{A^*(x-x_0)} B^{-1} y(x_0) = B [e^{r_1(x-x_0)}, e^{r_2(x-x_0)}, \dots, e^{r_n(x-x_0)}] B^{-1} y(x_0) = \\ &= B \begin{pmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2(x-x_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n(x-x_0)} \end{pmatrix} B^{-1} y(x_0) \end{aligned}$$

b) Dacă matricea A are valorile proprii $r_1, r_2, \dots, r_s$ multiple, respectiv de ordinul $n_1, n_2, \dots, n_s$; ($n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$) atunci, dacă matricea

$$B^{-1}AB = A^*$$

are formă conică Jordan

$$A^* = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

unde fiecare matrice J_k ($k = 1, 2, \dots, s$) este de ordinul n_k și are forma

$$J_k = \begin{pmatrix} r_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & r_k \end{pmatrix}$$

atunci procedăm în felul următor

Orice celulă Jordan J_k ($k = 1, 2, \dots, s$) se scrie

$$J_k = r_k E_k + I_k$$

unde E_k este matricea unitate de ordinul n_k , iar

$$I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este o matrice tot de ordinul n_k și are toate elementele

$$a_{r, r+1} = 1; (r = 1, 2, \dots, n_k - 1) \text{ iar celelalte egale cu zero.}$$

Mai observăm că suma și produsul a două matrice diagonale de forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sînt matrice de aceeași formă

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A_1 & 0 \\ 0 & B + B_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & 0 \\ 0 & BB_1 \end{pmatrix}$$

dacă A și A_1 respectiv B și B_1 sînt matrice de același ordin.

Din această ultimă observație rezultă

$$e^{A^*} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{J_s} \end{pmatrix} \quad (49)$$

Pentru a calcula matricea $e^{A^*(x-x_0)}$ este deci suficient să calculăm matricea $e^{J_k(x-x_0)}$. Printr-un calcul simplu obținem

$$I_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \dots,$$

$$I_k^{n_k-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_k^{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece E_k și I_k sînt permutabile, avem

$$\begin{aligned} e^{J_k(x-x_0)} &= e^{r_k(x-x_0)E_k} e^{I_k(x-x_0)} = \\ &= e^{r_k(x-x_0)} \left[E_k + \frac{x-x_0}{1!} I_k + \frac{(x-x_0)^2}{2!} I_k^2 + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x-x_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} I_k^{n_k-1} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

care scrisă sub formă dezvoltată, devine

$$e^{J_k(x-x_0)} = e^{r_k(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{1!} & \frac{(x-x_0)^2}{2!} & \dots & \frac{(x-x_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{x-x_0}{1!} & \dots & \frac{(x-x_0)^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1; \quad \frac{x-x_0}{1} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă notăm $f(r) = e^{r(x-x_0)}$, atunci formula (50) devine

$$e^{J_k(x-x_0)} = f(r_k) E_k + \frac{f'(r_k)}{1!} I_k + \frac{f''(r_k)}{2!} I_k^2 + \dots + \frac{f(r_k)}{(n_k-1)!} I_k^{n_k-1} \quad (51)$$

Matricea $e^{A^*(x-x_0)}$ poate fi considerată ca o sumă a s matrice care se obțin din formula (49) dacă se lasă neschimbată matricea $e^{J_k(x-x_0)}$ (în locul pe care-l ocupă în matrice) iar ceilalți termeni se înlocuiesc cu zero.

Cu această convenție, obținem

$$e^{A^*(x-x_0)} = \sum_{k=1}^s \left[f(r_k) E_k + \frac{f'(r_k)}{1!} I_k + \dots + \frac{f^{(n_k-1)}(r_k)}{(n_k-1)!} I_k^{n_k-1} \right]$$

Și dacă ținem seama că

$$y(x) = B e^{A^*(x-x_0)} B^{-1} y(x_0)$$

obținem soluția sistemului.

Exemplul 1.

Să se afle soluția sistemului

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2; & y_2' &= y_1 + 2y_2; & y_1(0) &= 2; \\ y_2(0) &= 3 \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică $D(r) = \begin{vmatrix} 5-r & 4 \\ 1 & 2-r \end{vmatrix} = 0$ are două rădăcini reale și distincte $r_1 = 6$; $r_2 = 1$
În acest caz avem

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{și } y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

și atunci, dacă ținem seama de rezultatul stabilit la cazul a), avem

$$\begin{aligned} y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} e^{r_1 x} & 0 \\ 0 & e^{r_2 x} \end{pmatrix} B^{-1} y(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{6x} & 0 \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} y(0) \\ y(x) &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4e^{6x} + e^x & 4e^{6x} - 4e^x \\ e^{6x} - e^x & e^{6x} + 4e^x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

de unde obținem

$$y_1(x) = 4e^{6x} - 2e^x; \quad y_2(x) = e^{6x} + 2e^x$$

Exemplul 2. Să se afle soluția sistemului

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 3y_2 + 3y_3 \\ y_2' &= -2y_1 - 6y_2 + 13y_3 \\ y_3' &= -y_1 - 4y_2 + 8y_3 \\ y_1(1) &= 1; \quad y_2(1) = 2; \quad y_3(1) = 3 \end{aligned}$$

Ecuția caracteristică

$$D(r) = \begin{vmatrix} 1-r & -3 & 3 \\ -2 & -6-r & 13 \\ -1 & -4 & 8-r \end{vmatrix} = 0$$

are trei rădăcini reale și egale ($r_1 = r_2 = r_3 = 1$)

În acest caz avem

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}; \quad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Avem

$$y(x) = B e^{A^*(x-1)} B^{-1} y(1)$$

Pentru a calcula $e^{A^*(x-1)}$ folosim rezultatul stabilit la cazul b). Considerăm funcția

$$f(r) = e^{r(x-1)}, \text{ avem } f'(r) = (x-1) e^{r(x-1)};$$

$$f''(r) = (x-1)^2 e^{r(x-1)}$$

și deci, pe baza formulei (51), obținem

$$e^{A^*(x-1)} = f(1) E_3 + \frac{f'(1)}{1!} I_3 + \frac{f''(1)}{2!} I_3^2 =$$

$$= e^{x-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (x-1) e^{x-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(x-1)^2}{2} e^{x-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{x-1} \begin{pmatrix} 1 & x-1 & \frac{(x-1)^2}{2} \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluția căutată este

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = e^{x-1} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x-1 & \frac{(x-1)^2}{2} \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

PROBLEME

Să se integreze sistemele următoare:

$$1. \quad y_1' = 2y_1 + y_2; \quad y_2' = y_1 + 2y_2; \quad y_1(0) = 1; \quad y_2(0) = 3$$

$$R: \quad y_1 = 2e^{3x} - e^x; \quad y_2 = 2e^{3x} + e^x$$

$$2. y_1' = 4y_1 + 6y_2; y_2' = 2y_1 + 3y_2 + x$$

$$R: y_1 = C_1 + C_2 e^{7x} - \frac{3}{49} x(7x + 2)$$

$$y_2 = -\frac{2}{3} C_1 + \frac{1}{2} C_2 e^{7x} + \frac{1}{49} (14x^2 - 3x - 1)$$

$$3. y_1' = -y_2 + e^x; y_2' = y_1 + e^{-x}$$

$$R: y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{sh} x;$$

$$y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x + \operatorname{sh} x.$$

$$4. y_1' = y_2 + x; y_2' = y_1 + e^x; y_1(0) = 1; y_2(0) = 0$$

$$R: y_1 = \frac{1}{4} (3e^x + 5e^{-x}) + \frac{1}{2} x e^x - 1$$

$$y_2 = \frac{5}{4} (e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2} x e^x - x$$

$$5. y_1'' + m^2 y_2 = 0; y_2'' - m^2 y_1 = 0$$

$$R: y_1 = e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} x + C_2 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} x \right) + e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}x} \left(C_3 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} x + C_4 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} x \right)$$

$$y_2 = e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}x} \left(C_1 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} x - C_2 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} x \right) + e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}x} \left(C_4 \cos \frac{m\sqrt{2}}{2} x - C_3 \sin \frac{m\sqrt{2}}{2} x \right)$$

$$6. y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3; y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3; y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3$$

$$R: y_1 = 2C_1 e^x + 7C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x}$$

$$y_2 = C_1 e^x + 3C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

$$y_3 = -2C_1 e^x - 8C_2 e^{2x} - 3C_3 e^{3x}$$

$$7. y_1' = 4y_1 - 3y_2; y_2' = 3y_1 + 4y_2$$

$$R: y_1 = e^{4x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x);$$

$$y_2 = e^{4x} (-C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x)$$

$$8. y_1' = y_1 - y_3; y_2' = y_1; y_3' = y_1 - y_2$$

$$R: y_1 = C_1 e^x + C_2 \cos x + C_3 \sin x$$

$$y_2 = C_1 e^x - C_2 \sin x + C_3 \cos x$$

$$y_3 = C_2 (\cos x + \sin x) + C_3 (\sin x - \cos x)$$

$$9. y_1' = -15y_1 - 6y_2 + 16y_3; y_2' = -15y_1 - 7y_2 + 18y_3;$$

$$y_3' = -19y_1 - 8y_2 + 21y_3$$

$$R: y_1 = 2C_1 e^{-x} + 2(4C_3 + C_2) \cos x - 2(4C_2 - C_3) \sin x$$

$$y_2 = -2C_1 e^x + 3(5C_2 + 3C_3) \cos x + 3(5C_3 - 3C_2) \sin x$$

$$y_3 = C_1 e^{-x} + (7C_2 + 11C_3) \cos x + (7C_3 - 11C_2) \sin x$$

$$10. y_1' = y_2 + y_3; y_2' = y_1 + y_2 - y_3; y_3' = y_2 + y_3.$$

$$R: y_1 = 2C_1 + (C_2 x + C_3) e^x$$

$$y_2 = -C_1 + C_2 e^x$$

$$y_3 = C_1 + (C_2 x + C_3) e^x$$

$$11. y_1' = -y_1 + y_2 + y_3; y_2' = y_1 - y_2 + y_3; y_3' = y_1 + y_2 - y_3$$

$$R: y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

$$y_2 = C_1 e^x + C_3 e^{-2x}$$

$$y_3 = C_1 e^x - C_2 e^{-2x} - C_3 e^{-2x}$$

$$12. xy_1' - y_2 = 0; xy_2' + y_1 = 0; (x \neq 0) \quad y_1(1) = 2; y_2(1) = 1$$

(Dacă se face schimbarea de variabilă $|x| = e^t$ se obține un sistem cu coeficienți constanți)

$$R: y_1 = 2 \cos(\ln |x|) + \sin(\ln |x|)$$

$$y_2 = -2 \sin(\ln |x|) + \cos(\ln |x|)$$

CAPITOLUL XVI

INTEGRALE PRIME

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE

Fie dat sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (1)$$

unde funcțiile reale $f_i (i = 1, 2, \dots, n)$ sînt definite și continue pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ iar derivatele parțiale $\frac{\partial f_i}{\partial y_j} (i, j = 1, 2, \dots, n)$ există și sînt continue pe D .

Definiție 1.1. O funcție $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ se numește integrală primă a sistemului de ecuație diferențiale (1) dacă pentru orice soluție

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x), \quad x \in I$$

a sistemului (1), funcția $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$\Phi(x) = F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x))$$

este constantă pe I .

Observație. Valoarea constantei depinde de soluție. Teorema care urmează are o importanță deosebită deoarece permite verificarea faptului că o funcție este integrală primă fără să fie necesară cunoașterea soluției sistemului.

Teorema 1.1. Condiția necesară și suficientă ca funcția $F: D \subset \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, cu derivate parțiale continue pe D , să fie integrală primă a sistemului (1) este ca în orice punct $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$ să aibă loc egalitatea

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} f_n = 0 \quad (2)$$

Demonstrație. Să demonstrăm necesitatea condiției. Fie

$$(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) \in D$$

Din teorema de existență și unicitatea pentru sisteme de ecuații diferențiale știm că există o soluție a sistemului (1)

$$y_1 = \varphi_1(x), y_2 = \varphi_2(x), \dots, y_n = \varphi_n(x), \quad x \in I$$

astfel încît

$$y_{10} = \varphi_1(x_0), y_{20} = \varphi_2(x_0), \dots, y_{n0} = \varphi_n(x_0)$$

Deoarece F este integrală primă a sistemului (1), atunci

$$F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)), \quad x \in I$$

este constantă, deci are derivata nulă. Dar F are derivate parțiale continue și deci derivata poate fi calculată cu ajutorul teoremei de derivare a funcțiilor compuse, obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \varphi_1'(x) + \frac{\partial F}{\partial y_2} \varphi_2'(x) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \varphi_n'(x) = 0$$

Ținînd seama că $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ este soluție a sistemului (1) obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} f_n = 0$$

și deoarece punctul $(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$ este arbitrar în D necesitatea condiției este demonstrată.

Să demonstrăm suficiența condiției. Presupunem că F satisface egalitatea (2) și dacă $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ este o soluție a sistemului (1), avem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \varphi_1'(x) + \frac{\partial F}{\partial y_2} \varphi_2'(x) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n} \varphi_n'(x) = 0$$

sau

$$\frac{d}{dx} F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) = 0$$

deci $F(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ este constantă.

Teorema 2.1. Fie $F_1, F_2, \dots, F_n$; n integrale prime ale sistemului de ecuații diferențiale (1). Presupunem:

1) funcțiile F_i ; ($i = 1, 2, \dots, n$) admit derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D .

2) determinatul funcțional

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}$$

este diferit de zero în fiecare punct $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$. Atunci, pentru $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in D$, găsirea soluției sistemului (1) care verifică condițiile

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \varphi_2(x_0) = y_{20}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$$

se reduce la o problemă de funcții implicite,

Demonstratie. Avem sistemul

$$\bar{F}_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) - \bar{F}_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, n.)$$

Condițiile din teoremă de existență de la sisteme de funcții implicite sînt îndeplinite. Există atunci funcțiile reale $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ definite și cu derivate continue într-o vecinătate a punctului x_0 , avînd următoarele proprietăți:

$$a) \varphi_i(x_0) = y_{i0}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{b) } F_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) - F_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0}) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Vom arăta că funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ formează o soluție a sistemului (1), cu

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \varphi_2(x_0) = y_{20}, \dots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$$

În adevăr, din proprietatea a) a funcțiilor φ_i , avem

$$\varphi_i(x_0) = y_{i0}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Vom calcula derivatele $\frac{d\varphi_i}{dx}$; $i = 1, \dots, n$ derivînd identitățile b). Avem:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \frac{d\varphi_2}{dx} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \frac{d\varphi_n}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dx} + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \frac{dy_n}{dx} = 0 \quad (3)$$

.....

$$\frac{\partial F_n}{\partial x} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial F_n}{\partial y_2} \frac{d\varphi_2}{dx} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \frac{d\varphi_n}{dx} = 0$$

derivatele parțiale fiind calculate în punctul $(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$. Din sistemul (3), pe baza regulii lui Cramer, obținem

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = - \frac{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n)}}{\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

adică funcțiile P_i , $i = 1, \dots, n$ nu se anulează simultan pe D . Orice sistem de ecuații diferențiale de forma (1) poate fi scris sub formă simetrică și anume

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)} = \frac{dx}{1} \quad (9)$$

și reciproc, orice sistem de ecuații diferențiale scris sub forma simetrică (7) se poate scrie și sub forma (1), anume (dacă $P_n \neq 0$ pe D)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_n} &= \frac{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ \frac{dx_2}{dx_n} &= \frac{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \frac{P_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \end{aligned} \quad (10)$$

din teorema 2.1 rezultă că rezolvarea sistemului simetric (7) (echivalent cu (10)) se reduce la o problemă de funcții implicite dacă sînt cunoscute $n - 1$ integrale prime independente funcțional. În acest scop este utilă teorema care urmează:

Teorema 1.2. Dacă $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ sînt n funcții reale definite și continue pe $D \subset \mathbb{R}^n$ cu următoarele proprietăți

- 1) $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n = 0$ pe D
- 2) $\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \dots + \mu_n dx_n = dF$ pe D

(11)

atunci funcția $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ este o integrală primă a sistemului (7).

Demonstrație. În adevăr, dacă $\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_n)$ este o soluție a sistemului (10) (echivalent cu (7)), atunci

$$d\varphi_1 = \frac{P_1}{P_n} dx_n, \dots, d\varphi_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{P_n} dx_n$$

Dacă înlocuim în identitatea (11) obținem

$$dF(\varphi_1(x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_n), x_n) = \frac{1}{P_n} (\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n) dx_n$$

și dacă ținem seama de proprietatea 1) avem

$$dF(\varphi_1(x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_n), x_n) = 0$$

deci $F(\varphi_1(x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_n), x_n)$ este constantă.

Dacă ținem seama de definiția integralei prime, rezultă că funcția F este o integrală primă a sistemului (7).

Observație. Funcțiile $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ se găsesc cu ajutorul sistemului (7), folosind regulile obișnuite ale proporțiilor:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{\mu_1 dx_1}{\mu_1 P_1} = \dots = \frac{\mu_n dx_n}{\mu_n P_n} = \frac{\mu_1 dx_1 + \dots + \mu_n dx_n}{\mu_1 P_1 + \dots + \mu_n P_n}$$

Alegem funcțiile $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ astfel încât să avem

$$\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n = 0$$

iar

$$\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \dots + \mu_n dx_n$$

să fie o diferențială totală exactă. Atunci, dacă folosim teorema 1.2 putem găsi o integrală primă.

Exemplul 1. Fie sistemul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z}$$

Scriem sistemul sub formă simetrică

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

dacă luăm $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, avem

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y} = \frac{dx + dy + dz}{0} \text{ și deci } dx + dy + dz = 0 \text{ de unde}$$

$$F_1(x, y, z) = x + y + z$$

este o integrală primă a sistemului dat.

Dacă luăm pe $\mu_1 = x, \mu_2 = y, \mu_3 = z$, avem

$$\frac{x dx}{x(y-z)} = \frac{y dy}{y(z-x)} = \frac{z dz}{z(x-y)} = \frac{x dx + y dy + z dz}{0} \text{ și, deci } x dx + y dy + z dz = 0$$

de unde

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

este o integrală primă a sistemului dat.

Rezolvarea sistemului dat se reduce la rezolvarea următorului sistem de funcții implicite

$$x + y + z = C_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

Exemplul 2. Fie sistemul

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}$$

dacă luăm $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = z$, $\mu_3 = -y$, obținem ecuația

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}; \quad d \ln \left| \frac{y}{z} \right| = 0 \quad \text{și deci} \quad F_1(x, y, z) = \frac{y}{z}$$

dacă luăm $\mu_1 = x$, $\mu_2 = y$, $\mu_3 = z$, obținem

$$\frac{x dx + y dy + z dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy} \quad \text{sau} \quad \frac{2(x dx + y dy + z dz)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}$$

din ultima ecuație obținem

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{dy}{y} = 0 \quad \text{sau} \quad d \ln (x^2 + y^2 + z^2) - d \ln |y| = 0$$

și deci

$$F_2(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$$

Rezolvarea sistemului se reduce la rezolvarea următorului sistem de funcții implicite.

$$\frac{y}{z} = C_1; \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2$$

§ 3 ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNȚII, LINIARE ȘI OMOGENE

Sînt ecuații de forma

$$\begin{aligned} P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

unde u este funcția necunoscută iar funcțiile reale P_i ; $i = 1, 2, \dots, n$; sînt definite pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$, admit derivate parțiale de ordinul întii continue pe D și în plus

$$\sum_{i=1}^n P_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0, \quad (\forall) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D$$

Vom presupune în continuare că $P_n \neq 0$.

Definiție 1.3. Spunem că funcția $F: D_1 \subset D \rightarrow \mathbf{R}$ este o soluție a ecuației (12) dacă F admite derivate parțiale de ordinul întâi continue pe D_1 și în toate punctele $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_1$ este verificată identitatea

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0 \quad (13)$$

Vom arăta că problema aflării soluțiilor ecuației (12) se reduce în fond la problema rezolvării unui sistem de ecuații diferențiale. În acest scop considerăm sistemul

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (14)$$

care se numește sistemul caracteristic al ecuației (12) iar curbele integrale ale sistemului (14) se numesc curbe caracteristice ale ecuației (12).

Teorema 1.3. O funcție $F: D_1 \subset D \rightarrow \mathbf{R}$ este soluție a ecuației cu derivate parțiale (12) dacă și numai dacă funcția F este o integrală primă a sistemului caracteristic (14).

Demonstrație. În adevăr, dacă F este o integrală primă a sistemului caracteristic (14), atunci pe baza teoremei 1.1 are loc egalitatea

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{P_1}{P_n} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{P_2}{P_n} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{P_n} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0$$

Dacă înmulțim cu P_n , obținem

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

și deci funcția F este o soluție a ecuației (12).

Invers, dacă $F: D_1 \subset D \rightarrow \mathbf{R}$ este o soluție a ecuației (12) avem

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

de unde obținem

$$\frac{P_1}{P_n} \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{P_2}{P_n} \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{P_n} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

și pe baza teoremei 1.1 rezultă că funcția F este o integrală primă a sistemului caracteristic (14).

Teorema 2.3. Dacă funcția reală Φ definită pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^k$, are derivate parțiale continue și dacă $F_1, F_2, \dots, F_k$ sînt k integrale prime ale sistemului caracteristic (14), atunci funcția compusă

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_k)$$

este o soluție a ecuației cu derivate parțiale (12).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x_2} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\partial u}{\partial x_n} &= \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_k} \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial F_1} \left(P_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + P_n \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \right) + \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial F_2} \left(P_1 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \right) + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ \frac{\partial \Phi}{\partial F_k} \left(P_1 \frac{\partial F_k}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F_k}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F_k}{\partial x_n} \right). \end{aligned}$$
$$P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$
$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}) \quad (15)$$

466

Demonstrație. Fie $u: D_1 \subset D \rightarrow \mathbf{R}$ o soluție a ecuației cu derivate parțiale (12) și dacă ținem seama de teorema 1.3 avem egalitățile

$$P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

$$P_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0;$$

$$P_1 \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

$$(\forall) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_1$$

Am obținut în acest fel un sistem algebric omogen în $P_1, P_2, \dots, P_n$. Acest sistem are o soluție nebanală în D_1 deoarece cel puțin una din funcțiile $P_1, P_2, \dots, P_n$ este diferită de zero și conform teoremei lui Rouché rezultă că determinantul sistemului

$$\frac{D(u, F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

este egal cu zero în orice punct $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_1$.

Deoarece integralele prime $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sînt independente funcțional rezultă că matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

are rangul $n - 1$. Dacă folosim un rezultat stabilit referitor la dependența funcțională (2.4 cap III), rezultă că există o funcție $\Phi: D_1 \subset D \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât să avem

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$$

Definiție 1.3. Funcția $u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ se numește soluția generală a ecuației cu derivate parțiale (12).

Din rezultatele stabilite mai sus rezultă că pentru aflarea soluției generale a ecuației cu derivate parțiale

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (12)$$

trebuie parcurse următoarele etape:

a) scriem sistemul caracteristic al ecuației (12)

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (14)$$

b) determinăm cu ajutorul teoremei 1.2, $n - 1$ integrale prime independente funcțional ale sistemului (14);

c) soluția generală a ecuației cu derivate parțiale (12) este

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$$

unde $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sînt integralele prime aflate la punctul b).

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

Sistemul caracteristic al ecuației date este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$$

și se vede imediat că

$$F_1 = \frac{x_2}{x_n}; \quad F_2 = \frac{x_2}{x_n}, \dots, F_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

sînt $n - 1$ integrale prime independente funcțional. Soluția generală este

$$u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right)$$

§ 4. PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI, LINIARE ȘI OMOGENE

De cele mai multe ori în problemele care conduc la ecuații cu derivate parțiale de forma (12) ne interesează o anumită soluție a ecuației obținute. Această soluție îndeplinește anumite condiții inițiale.

Problema lui Cauchy pentru ecuația

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ P_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \quad (12)$$

este următoarea:

să se determine soluția u a ecuației (12) care pentru $x_n = x_{n_0}$ satisface egalitatea

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}); \quad (\forall) \quad (x_1, x_2, x_{n-1}, x_{n0}) \in D. \quad (15)$$

unde φ este o funcție dată care admite derivate parțiale continue.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy fie $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$; $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic (14) și presupunem că determinantul

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}$$

este diferit de zero în punctul $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) \in D$.

Rezolvarea problemei lui Cauchy revine în fond la determinarea funcției Φ astfel încât funcția compusă

$$\mathcal{U} = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$$

să satisfacă condiția (15).

Deoarece $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sînt integrale prime ale sistemului caracteristic, avem

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = C_i; \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (16)$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$ sînt constante reale.

Fie D_1 o vecinătate a punctului x_0 , în care sistemul (16) poate fi rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Dacă în (16) luăm $x_n = x_{n0}$, obținem sistemul

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) &= C_1 \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) &= C_2 \\ &\vdots \\ F_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) &= C_{n-1} \end{aligned} \quad (17)$$

care rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ne dă

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) \\ x_2 &= \varphi_2(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) \\ x_{n-1} &= \varphi_{n-1}(C_1, C_2, \dots, C_{n-1}) \end{aligned} \quad (18)$$

Considerăm funcția compusă

$$\mathcal{U} = [\varphi_1(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}), \varphi_2(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}), \dots, \varphi_{n-1}(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})] \quad (19)$$

Din teorema 3.3 rezultă imediat că funcția u dată la (19) este soluție a ecuației (12) și din modul cum a fost construită rezultă că

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$$

adică ea satisface și condiția (15). Deci funcția (19) este soluția problemei lui Cauchy.

§ 5. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNȚII CVASILINIARE

Sînt ecuații de forma

$$\begin{aligned} P_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + \\ + P_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) \end{aligned} \quad (20)$$

unde u este funcția necunoscută iar funcțiile reale P_i ; $i = 1, 2, \dots, n+1$ sînt definite pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, admit derivate parțiale de ordinul întii continue pe D și în plus

$$\sum_{i=1}^n P_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \neq 0; \quad (\forall) (x_1, x_2, \dots, x_n, u) \in D.$$

Studiul unei ecuații de forma (20) se reduce la studiul unei ecuații de forma (12). Acest fapt rezultă din

Teorema 1.5. Integrarea ecuației (20) se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale de ordinul întii, liniară și omogenă

$$\begin{aligned} P_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + \\ + P_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Demonstrație. În adevăr, să căutăm o soluție u , a ecuației (20), sub formă implicită

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0 \quad (22)$$

unde V este o funcție necunoscută ce trebuie determinată. Presupunem că funcția V are derivate parțiale continue pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ și în plus $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ pe D . Din ecuația (22) obținem

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

sau

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\partial V}{\partial x_i} : \frac{\partial V}{\partial u}$$

dacă înlocuim aceste derivate parțiale în (20) rezultă

$$P_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1} \frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

care este o ecuație liniară și omogenă în V . Soluția generală a acestei ecuații este

$$V = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

unde $F_1, F_2, \dots, F_n$ sînt n integrale prime independente funcțional ale sistemului

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_{n+1}} \quad (23)$$

Deci soluțiile ecuației (20) sînt definite implicit de ecuații de forma

$$\Phi[F_1(x_1, \dots, x_n, u), F_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n, u)] = 0$$

unde Φ satisface condiții evidente.

Exemplu. Să se afle soluțiile ecuației

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = ku$$

În acest caz sistemul caracteristic (23) devine

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{ku}$$

și se vede imediat că

$$F_1 = \frac{x_1}{x_n}; \dots; F_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}; \quad F_n = \frac{u}{x_n^k}$$

sînt n integrale prime independente funcțional pentru acest sistem. Soluțiile ecuației sînt date implicit de ecuația

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^k}\right) = 0$$

Pentru ecuații de forma (20) *problema lui Cauchy* este următoarea:

Să se determine soluția u a ecuației (20) care pentru $x_n = x_{n0}$ satisface egalitatea

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (24)$$

unde φ este o funcție dată care admite derivate parțiale continue.

Observație. În cazul a două variabile independente problema lui Cauchy are o interpretare geometrică simplă. Dacă $z = \varphi(x, y)$ este o soluție a ecuației

$$P(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \quad (29)$$

suprafața de ecuație $z = \varphi(x, y)$ se numește suprafață integrală a ecuației (29). Problema lui Cauchy revine la a determina suprafața integrală care trece prin curba definită de ecuațiile

$$y = y_0; z = \psi(x) \quad (30)$$

Dacă F_1 și F_2 sînt două integrale prime independente funcțional ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \quad (31)$$

problema lui Cauchy se reduce la găsirea legăturii între C_1 și C_2 din sistemul

$$F_1(x, y, z) = C_1; F_2(x, y, z) = C_2; y = y_0; z = \psi(x) \quad (32)$$

Rezultatul este o relație de forma $\Phi(C_1, C_2) = 0$ în care dacă înlocuim pe C_1 și C_2 cu F_1 și respectiv F_2 , obținem soluția problemei lui Cauchy. Curba definită de ecuațiile (30) poate fi înlocuită cu orice curbă definită de ecuațiile

$$G(x, y, z) = 0; H(x, y, z) = 0$$

Dacă $G = \lambda(F_1, F_2)$ și $H = \mu(F_1, F_2)$ soluția problemei lui Cauchy nu este determinată.

Exemplu. Să se determine soluția ecuației

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

care trece prin curba definită de ecuațiile

$$x^2 + y^2 = 1; z = 2$$

Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Se vede imediat că $F_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$ și $F_2(x, y, z) = \frac{x}{z}$ sînt integrale prime independente. În acest caz sistemul (32) devine

$$x^2 + y^2 = 1; \quad z = 2; \quad \frac{x}{y} = C_1; \quad \frac{x}{z} = C_2$$

de unde obținem $C_1^2 C_2^2 + C_2^2 = \frac{C_1^2}{4}$

Dacă înlocuim pe C_1 și C_2 obținem

$$z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

PROBLEME

Să se integreze următoarele sisteme

$$1) \frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2};$$

$$R: y + 2\sqrt{z - x - y} = C_1; \quad z - 2y = C_2$$

$$2) y' = \frac{y}{y + z}; \quad z' = \frac{z}{y + z}; \quad y(0) = 2; \quad z(0) = 4$$

$$R: y = \frac{1}{3}x + 2; \quad z = \frac{2}{3}x + 4$$

$$3) y' = y^2 + yz; \quad z' = yz + z^2;$$

$$R: y = -\frac{1}{(1 + C_1)x + C_2}; \quad z = -\frac{C_1}{(1 + C_1)x + C_2}$$

$$4) \frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$R: x^2 = \frac{2t + C_1}{1 + C_2^2 + C_3^2}; \quad y^2 = \frac{C_2^2(2t + C_1)}{1 + C_2^2 + C_3^2}; \quad z^2 = \frac{C_3^2(2t + C_1)}{1 + C_2^2 + C_3^2}$$

Să se afle soluțiile următoarelor ecuații cu derivate parțiale

$$5) xy \frac{\partial u}{\partial x} - y\sqrt{1 - y^2} \frac{\partial u}{\partial y} + (z\sqrt{1 - y^2} - xy) \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$R: u = \Phi[2yz + x(y + 1 - y^2), \quad x e^{\arcsin y}]$$

$$6) \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y-x}{z}; \text{ să se afle suprafața integrală ce conține curba } x=1; y^2=z$$

$$R: z^2 = (x+y-1)^2 + 2xy - 2(x+y-1)$$

$$7) 2y^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2+1}$$

$$R: \Phi(x^2+y^2, yz+y\sqrt{z^2+1})=0$$

$$8) y \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} + 1 + z^2 = 0;$$

$$R: \Phi(x+yz, y^2-x^2-2xyz)=0$$

$$9) (xy^3-2x^4) \frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4-x^3y) \frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3-y^3)$$

$$R: \Phi\left(zx^3y^3, \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right) = 0$$

$$10) 2y(2a-x) \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2+z^2-y^2-4ax) \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0$$

$$R: \Phi\left(\frac{z}{2a-x}, \frac{x^2+y^2+z^2}{z}\right) = 0$$

STABILITATEA SOLUȚIILOR ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE

$$\begin{aligned}
 \text{Fie} \quad y'_1 &= \Phi_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 y'_2 &= \Phi_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \\
 &\dots\dots\dots \\
 y'_n &= \Phi_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n)
 \end{aligned} \tag{1}$$

un sistem de ecuații diferențiale unde variabila independentă este t și o interpretăm ca reprezentînd timpul variînd de la t_0 la ∞ , iar $y_1, y_2, \dots, y_n$ sînt funcțiile necunoscute. Presupunem că funcțiile Φ_i , $i = 1, \dots, n$ satisfac condițiile din teorema de existență pentru sisteme de ecuații diferențiale. Fie

$$y_1 = \varphi_1(t); y_2 = \varphi_2(t), \dots, y_n = \varphi_n(t) \tag{2}$$

soluția sistemului (1) care satisface următoarele condiții inițiale

$$\varphi_1(t_0) = y_{10}, \varphi_2(t_0) = y_{20}, \dots, \varphi_n(t_0) = y_{n0} \tag{3}$$

Definiție 1.1. Soluția

$$y_1 = \varphi_1(t), y_2 = \varphi_2(t), \dots, y_n = \varphi_n(t)$$

a sistemului (1) se numește stabilă (în sensul lui Leapunov) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît orice altă soluție

$$y_1 = y_1(t), y_2 = y_2(t), \dots, y_n = y_n(t) \tag{4}$$

a sistemului (1), care în momentul inițial satisface condițiile

$$|\varphi_i(t_0) - y_i(t_0)| < \delta(\varepsilon), i = 1, 2, \dots, n$$

satisface și condițiile

$$|\varphi_i(t) - y_i(t)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n$$

pentru orice $t > t_0$

Observația 1. Pentru ca definiția să aibă sens trebuie ca soluția (2) să fie prelungibilă pentru orice $t > t_0$.

Observația 2. Condițiile de stabilitate cer ca toate soluțiile de forma (4), cu condiții inițiale suficient de apropiate de cele ale soluției (2), să fie de asemenea prelungibile pentru orice $t > t_0$ și în plus să rămână tot timpul în apropierea soluției (2).

Definiție 2.1. Soluția (2) a sistemului (1) se numește asimptotic stabilă dacă este stabilă și dacă există $\delta_0 > 0$ astfel încât condițiile

$$|\varphi_i(t_0) - y_i(t_0)| < \delta_0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

să implice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi_i(t) - y_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Exemplu 1. Să se studieze stabilitatea soluției φ a ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y; \quad a \neq 0$$

care satisface condiția $\varphi(t_0) = y_0$.

Se vede imediat că avem

$$\varphi(t) = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

Soluția φ este asimptotic stabilă. În adevăr, dacă

$$\bullet \quad y(t) = \bar{y}_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

este o altă soluție care satisface condiția $y(t_0) = \bar{y}_0$, atunci

$$|\varphi(t) - y(t)| = e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$, dacă

$$|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon.$$

și deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - y(t)| = 0$$

Exemplu 2. Să se studieze stabilitatea soluției φ a ecuației

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y; \quad a \neq 0$$

care satisface condiția $\varphi(t_0) = y_0$

Se vede imediat că avem

$$\varphi(t) = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$$

Soluția φ este instabilă. În adevăr, fie

$$y(t) = \bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)}$$

o altă soluție a ecuației, care satisface condiția $y'(t_0) = \bar{y}_0$. Nu putem găsi $\delta(\epsilon) > 0$ astfel încât din inegalitatea

$$|y - \bar{y}_0| < \delta(\epsilon)$$

să rezulte

$$|\varphi(t) - y'(t)| = e^{a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \epsilon$$

pentru orice $t > t_0$.

Pentru a studia stabilitatea soluției (2) este convenabil să facem o schimbare de funcții necunoscute în sistemul de ecuații diferențiale (1). Luăm ca noi funcții necunoscute pe $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, unde

$$x_i = y_i - \varphi_i(t) \quad (5)$$

În urma acestei schimbări de funcții se obține sistemul

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(t, x_1 + \varphi_1, \dots, x_n + \varphi_n) - \Phi_i(t, \varphi_1, \dots, \varphi_n); \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

Dacă ținem seama de faptul că $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$; sînt funcții cunoscute care depind de t , sistemul (6) este un sistem de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

Se vede imediat că soluției

$$y_1 = \varphi_1(t), \dots, y_n = \varphi_n(t)$$

a sistemului (1) îi corespunde soluția banală

$$x_1 = 0, \dots, x_n = 0$$

pentru sistemul (7). În acest fel studiul stabilității soluției (2) a sistemului (1) se reduce la studiul stabilității soluției banale a sistemului (7). Vom considera în continuare sisteme de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

și presupunem că admit soluția banală $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$.

Definiție 3.1. Soluția banală a sistemului (7) se numește stabilă dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta(\epsilon) > 0$ astfel încât orice soluție

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \dots, x_n = x_n(t) \quad (8)$$

a sistemului (7), care în momentul inițial satisface condițiile

$$|x_i(t_0)| < \delta(\epsilon), \quad i = 1, \dots, n$$

satisface și condițiile

$$|x_i(t)| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n$$

pentru orice $t > t_0$.

Dacă în plus, există $\delta_0 > 0$ astfel încît condițiile

$$|x_i(t_0)| < \delta_0, \quad i = 1, \dots, n$$

să implice

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

atunci soluția banală se numește asimptotic stabilă.

Definiția stabilității soluției banale mai poate fi formulată și sub o altă formă echivalentă. Pentru aceasta reamintim că, dacă $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ atunci

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

Definiție 4.1. Soluția banală a sistemului (7) se numește stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît orice soluție

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$$

a sistemului (7) care în momentul inițial satisface condiția

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$$

satisface și condiția

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$.

§ 2. TEOREMA DE STABILITATE A LUI LEAPUNOV

Pentru studiul stabilității soluției banale vom utiliza metoda funcției lui Leapunov. În acest scop sînt necesare cîteva noțiuni pregătitoare.

1) O funcție reală $W(x) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită și continuă într-o vecinătate a originii din $\mathbf{R}^n$, cu $W(0) = 0$, se numește pozitiv definită (negativ definită) dacă există un număr $h > 0$ astfel încît pentru orice punct din sfera

$$S_h(0) = \{x \in \mathbf{R}^n; \|x\| < h\}$$

funcția W ia numai valori pozitive (negative).

2) Dacă $W(x)$, fără să schimbe semnul, se poate anula și în afara originii spunem că W este de semn constant.

Exemplu. Funcția

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$$

este pozitiv definită, iar funcția

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 - x_2 - \dots - x_n)^2$$

este de semn constant.

Fie dată funcția reală $V(t, x) = V(t, x_1, \dots, x_n)$ definită pe domeniul

$$D = \{(t, x); t > t_0, \|x\| < h\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

Presupunem că funcția V are derivate parțiale continue pe D și că $V(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$.

3) Dacă pentru orice $\lambda > 0$ există $\mu > 0$ astfel încît pentru orice $t > t_0$ și x cu $\|x\| < \mu$ să avem

$$|V(t, x)| \leq \lambda$$

spunem că funcția V are limită superioară infinit mică.

Exemplu. Funcția

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2) \sin t$$

are limită superioară infinit mică.

4) Funcția reală $V(t, x)$ definită pe domeniul D se numește pozitiv definită dacă există o funcție reală $W(x)$ pozitiv definită astfel încît

$$V(t, x) \geq W(x); t \geq t_0; \|x\| < h$$

Analog, funcția V se numește negativ definită dacă

$$V(t, x) \leq -W(x)$$

Exemplu. Funcția

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = e^t(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

este pozitiv definită deoarece

$$V(t, x_1, \dots, x_n) \geq x_1^2 + \dots + x_n^2$$

Funcția

$$V(t, x_1, \dots, x_n) = e^{-t}(x_1^2 + \dots + x_n^2)$$

nu este pozitiv definită.

5) Dacă $V(t, x_1, \dots, x_n)$ fără să schimbe semnul, se poate anula și în afara punctului $(t, 0, \dots, 0)$ spunem că V este de semn constant.

În enunțul teoremei lui Leapunov intervine pe lângă funcția V și derivata sa în raport cu timpul luată în virtutea sistemului (7). Această derivată are expresia

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i \quad (8)$$

Teorema 1.2. Fie dat sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

care admite soluția banală. Dacă se poate găsi o funcție $V(t, x)$ de semn definit, astfel încît derivata sa în virtutea sistemului (7) să fie o funcție de semn constant opus semnului lui V sau identic nulă, atunci soluția banală este stabilă.

Demonstrație. Pentru fixarea ideilor presupunem că V este o funcție pozitiv definită. Din ipotezele teoremei rezultă că există o funcție $W(x)$, pozitiv definită, astfel încît

$$V(t, x) \geq W(x) \text{ pentru } t > t_0; \|x\| < h; \quad (9)$$

$$\text{Fie } \Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = \varepsilon\} \text{ unde } 0 < \varepsilon < h$$

Dacă ținem seama de proprietățile funcției W rezultă că

$$l = \inf_{x \in \Sigma} W(x)$$

există și în plus $l > 0$

Din inegalitatea (9) deducem că

$$V(t, x) \geq l \text{ pentru } t > t_0 \text{ și } x \in \Sigma \quad (9')$$

Fie $\delta \in (0, \varepsilon)$ și $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ un punct cu proprietatea că $\|x_0\| < \delta$. Deoarece $V(t_0, 0, \dots, 0) = 0$ și $V(t_0, x_1, \dots, x_n)$ este o funcție continuă rezultă că

$$V(t_0, x_{10}, \dots, x_{n0}) < l$$

Dacă $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ este soluția sistemului (7), care satisface condiția

$$x(t_0) = x_0, \text{ adică } x_i(t_0) = x_{i0}; \quad i = 1, \dots, n$$

atunci are loc inegalitatea

$$\|x(t)\| < \varepsilon \text{ pentru } t > t_0 \quad (10)$$

În adevăr, dacă pentru un anumit $t > t_0$ am avea

$$\|x(t)\| \geq \varepsilon \quad (11)$$

atunci ar exista $t' > t_0$ astfel încît

$$\|x(t')\| = \varepsilon$$

adică $x(t') \in \Sigma$ și dacă ținem seama de inegalitatea (9') rezultă că

$$V(t', x(t')) \geq l \quad (12)$$

Din ultima ipoteză a teoremei, rezultă că funcția

$$V(t, x(t)), t \geq t_0$$

are derivata negativă și deci este descrescătoare, avem

$$V(t', x(t')) \leq V(t_0, x(t_0)) \leq l \quad (13)$$

Inegalitatea (12) arată că inegalitatea (13) nu este posibilă pentru nici o valoare a lui t . Deducem de aici că inegalitatea (10) are loc pentru orice $t \geq t_0$; din inegalitățile

$$\|x(t_0)\| < \delta \text{ și } \|x(t)\| < \varepsilon; t \geq t_0$$

rezultă că soluția banală este stabilă.

§ 3. TEOREMA DE STABILITATE ASIMPTOTICĂ A LUI LEAPUNOV

Teorema 3. Fie dat sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

care admite soluția banală. Dacă se poate găsi o funcție $V(t, x)$ de semn definit care admite o limită superioară infinit mică și dacă derivata lui V în virtutea sistemului (7) este o funcție de semn constant, opus semnului lui V , atunci soluția banală este asimptotic stabilă.

Demonstrație. Presupunem că V este o funcție pozitiv definită. Din ipotezele teoremei rezultă că

$$V(t, x) < W(x) \text{ pentru } t \geq t_0; \|x\| < h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i < -W_1(x) \text{ pentru } t > t_0; \|x\| < h$$

unde W și W_1 sînt două funcții pozitiv definite. Condițiile teoremei precedente sînt evident îndeplinite și deci soluția banală a sistemului (7) este stabilă, adică $(\forall) \varepsilon > 0: (\exists) \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice soluție

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \quad (14)$$

a sistemului (7) care la momentul inițial satisface condiția

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$$

satisface și condiția

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$. Rămîne să arătăm că

$$\|x(t)\| \rightarrow 0 \text{ pentru } t \rightarrow \infty$$

Să observăm că nu putem avea $x(t) = 0$. În adevăr, dacă ar exista un anumit număr $t' > t_0$ pentru care am avea $x(t') = 0$ atunci prin punctul $(t', 0) \in D$ ar trece două curbe integrale ale sistemului (7) și anume cea corespunzătoare soluției banale și cea corespunzătoare soluției (14). Din teorema de existență și unicitate pentru sisteme de ecuații diferențiale știm că acest lucru nu este posibil și deci $x(t') \neq 0$. Din inegalitatea

$$\|x(t)\| < \varepsilon; \text{ cu } x(t) \neq 0,$$

și din faptul că derivata lui V în virtutea sistemului este negativ definită rezultă că funcția $V(t, x(t))$ este strict descrescătoare și deci următoarea limită există și este finită.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = \alpha \geq 0 \text{ și } V(t, x(t)) > \alpha$$

Să arătăm că $\alpha = 0$. Presupunem $\alpha > 0$. Cum V admite o limită superioară infinit mică urmează că există $\beta > 0$ astfel încît dacă $\|x\| < \beta$ să avem $V(t, x) \leq \alpha$. Deci din inegalitatea

$$V(t, x(t)) > \alpha \text{ rezultă } \|x(t)\| \geq \beta; (\forall) t \geq t_0$$

Deoarece $\frac{dV}{dt}$ este negativ definită, există $\gamma > 0$ astfel încît

$$\frac{dV}{dt} < -\gamma \text{ pentru } \|x(t)\| \geq \beta$$

Dar

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^t \frac{dV}{dt} dt \leq V(t_0, x(t_0)) - \gamma(t - t_0)$$

de unde rezultă că pentru t suficient de mare, V ar putea deveni negativă, ceea ce contrazice faptul că $V(t, x(t)) \geq 0$. Prin urmare $\alpha = 0$ și deci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(t)) = 0$$

Din caracterul pozitiv definit a lui V rezultă că

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

și deci $\|x(t)\| \rightarrow 0$ pentru $t \rightarrow \infty$

adică soluția banală este asimptotic stabilă și teorema este demonstrată.

În unele aplicații este util să avem la dispoziție un criteriu de nestabilitate. Dăm fără demonstrație următoarea teoremă dată de Cetaev;

Teorema 2.3. Fie dat sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

care admite soluția banală. Dacă se poate găsi o funcție $V(t, x)$ care admite limită superioară infinit mică și dacă $\frac{dV}{dt}$, derivata lui V în virtutea sistemului, este de semn definit iar funcția V ia valori de același semn ca și $\frac{dV}{dt}$, atunci soluția banală este nestabilă.

Demonstrația acestei teoreme se găsește în [14] sau [16].

Exemplu 1. Să se studieze stabilitatea soluției banale pentru sistemul

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4; \quad \frac{dy}{dt} = yx^4.$$

Funcția $V(x, y) = x^4 + y^4$ satisface condițiile din teorema de stabilitate a lui Leapunov. În adevăr, avem

$$a) \quad V(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0 \quad V(0, 0) = 0$$

$$b) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0$$

și deci soluția banală este stabilă.

Exemplu 2. Să se studieze stabilitatea soluției banale pentru sistemul

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3; \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3$$

Funcția $V(x, y) = x^2 + y^2$ satisface condițiile din teorema de stabilitate asimptotică a lui Leapunov. În adevăr,

$$a) \quad V(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 \quad V(0, 0) = 0$$

$$b) \quad \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) \leq 0$$

Funcția V admite, evident, o limită superioară infinit mică și deci soluția banală a sistemului dat este asimptotic stabilă.

§ 4. STABILITATEA ÎN PRIMĂ APROXIMAȚIE

Fie dat sistemul de ecuații diferențiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (7)$$

care admite soluția banală. Presupunem că funcțiile f_i admit derivate parțiale continue în raport cu x_j și că aceste derivate sînt constante de-a lungul soluției banale, adică

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, 0, \dots, 0) = a_{ij} = \text{constant}; \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Deoarece $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$, urmează că funcțiile f_i pot fi scrise sub forma

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (15)$$

unde φ_i sînt funcții cu proprietatea că $\varepsilon > 0$ fiind dat există o vecinătate U a originii astfel încît

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| < \varepsilon; \quad (\forall) \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U \quad \text{și}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)}{r} = 0; \quad r = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

În aceste condiții sistemul (7) poate fi scris sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (16)$$

Dacă în acest sistem se neglijează funcțiile φ_i se obține sistemul primei aproximații.

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \quad (17)$$

Se pune întrebarea în ce condiții stabilitatea decisă de sistemul (17) este valabilă și pentru sistemul (7). Răspunsul la această întrebare este dat de următoarea

Teorema 1.4. Dacă:

a) funcțiile f_i satisfac condițiile din teorema de existență și unicitate pentru sistemele de ecuații diferențiale

b) sînt satisfăcute condițiile

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, 0, \dots, 0) = a_{ij}; \quad j, i = 1, \dots, n$$

c) rădăcinile ecuației caracteristice $\det (A - \lambda E) = 0$ au părțile reale negative

d) funcțiile φ_i satisfac inegalitatea

$$|\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)| \leq Mr^{1+\alpha}; \quad M > 0; \quad \alpha > 0,$$

atunci soluția banală a sistemului (7) este stabilă. Nu dăm demonstrația acestei teoreme, ea poate fi găsită în [38]. În aplicații este util să avem la dispoziție un criteriu pentru a decide dacă rădăcinile ecuației

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

scrisă sub forma

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \quad (a_0 > 0) \quad (18)$$

au sau nu partea reală negativă (fără a rezolva ecuația).

Teorema lui Hurwitz și Routh

Teoremă. Pentru că toate rădăcinile ecuației (18), cu coeficienți reali, să aibă partea reală negativă este necesar și suficient ca toți determinanții

$$D_1 = a_1; \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(peste tot se spune $a_p = 0$ dacă $p > n$) să fie pozitivi. Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în [15].

Exemplu. Fie dat sistemul

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8 \sin y; \quad \frac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - \cos y$$

care admite, evident, soluția banală. Condițiile din teoremă sînt îndeplinite și deci putem pune sistemul dat sub forma

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + \varphi_1; \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y + \varphi_2$$

unde φ_1 și φ_2 satisfac condiția d). Sistemul primei aproximații este

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y; \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y$$

și are ecuația caracteristică $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, deci

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

de unde deducem că soluția banală este stabilă pentru sistemul considerat.

BIBLIOGRAFIE

1. Apostol T. — *Calculus*, vol. II MASSACHUSETTS, TORONTO, LONDON, 1968.
2. Arnold V. — *Ecuations differentielles ordinaires*. MOSCOU, 1974.
3. Budak B., Fomin S. — *Multiple integrals, field theory an series*. MOSCOW, 1973.
4. Colojoară I. — *Elemente de analiză matematică*, BUCUREȘTI, 1975.
5. Chilov G. — *Analyse mathématique*, MOSCOU, 1975.
6. Craiu M. — *Elemente de analiză matematică*, BUCUREȘTI, 1976 (lit. I.P.B.).
7. Craiu M., Roșculeț M. — *Ecuatii diferențiale aplicative*, BUCUREȘTI, 1971.
8. J. Dieudonne — *Bazele analizei matematice* (lb. rusă), 1964.
9. Dobrescu E. — *Analiză matematică*, BUCUREȘTI, 1974.
10. Dragoș L. — *Principiile mecanicii analitice*, București, 1976.
11. Elsgolts L. — *Differential equations and the calculus of variations*, MOSCOW, 1970.
12. Fihtenholt M. — *Curs de calcul diferențial și integral*. București, 1964.
13. Grauert H., Fischer W., Lieb I. — *Differential and Integralrechnung*. Berlin, Heidelberg, New-York, 1967—1968.
14. Haimovici A. — *Ecuatii diferențiale și ecuații integrale*, București, 1968.
15. Halanay A. — *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, 1956.
16. Halanay A. — *Ecuatii diferențiale*, București, 1972.
17. Ionescu D.V. — *Ecuatii diferențiale și integrale*, București, 1964.
18. Ionescu D.V., Kalik C. — *Ecuatii diferențiale ordinare și cu derivate parțiale*, București, 1965.
19. Lelong Ferrand J., Arnaudies M — *Cours de mathematiques*, Paris.
20. Marinescu Gh. — *Teoria ecuațiilor diferențiale și integrale*, București, 1963.
21. Matveev N. — *Metode de integrare a ecuațiilor diferențiale ordinare* (în lb. rusă), Minsk, 1974.
22. Meghea C. — *Bazele analizei matematice*, Ed. științifică, 1977.
23. Myskis A. — *Introductory mathematics for engincers*, MOSCOW, 1975.
24. Nicolescu M. și alții. — *Manual de analiză matematică*, București, 1964.
25. Nicols ki S. — *Curs de analiză matematică* (în lb. rusă), Moscova, 1974.
26. Pisot Ch., Zamansky N. — *Mathematiques generales*, Paris, 1966.
27. Piskunov N. — *Differential and integral calculus*. MOSCOW, 1969.
28. Pavel P., Rus A.I. — *Ecuatii diferențiale și integrale*, București, 1975.
29. Pontriaghin L. — *Ecuatii diferențiale ordinare* (în lb. rusă), Moscova, 1974.
30. Roșculeț M. — *Analiză matematică*, București, 1966.

31. Roşculeţ M. — ş.a. — *Metode aproximative şi numerice în algebră şi analiză*, Bucureşti, 1976 (lit. I.P.B.).
32. Reza F. — *Spaţii liniare*, Bucureşti, 1973.
33. Rogai E. — *Exerciţii şi probleme de ecuaţii diferenţiale şi integrale*. Bucureşti, 1965.
34. Rudin W. — *Principles of mathematical analysis*, McGraw Hill 1969.
35. Sabac I. — *Matematici speciale*. Bucureşti, 1965.
36. Spivak M. — *Matematiceskii analiza mnogoobraziah*, Moskva, 1968.
37. Stănăşilă O. — *Analiză matematică (note de curs)*, Bucureşti, 1976.
38. Stepanov V.V. — *Curs de ecuaţii diferenţiale*, Bucureşti, 1955.
39. Schwartz L. — *Analyse mathématique*, Paris, 1967.
40. Teleman C. — *Elemente de topologie şi varietăţi diferenţiale*, Bucureşti, 1964.
41. Tănase V. — *Elemente de analiză matematică* (lit. I.P.B.), 1977
42. Gh. Sireţchi — *Analiză matematică Vol. II* Bucureşti 1977.
43. B. P. Demidovici — *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică*. (în lb. rusă). Moscova 1977.

CUPRINS

Cap. I. Mulțimi. Structuri. Funcții	5
§ 1. Mulțimi	5
§ 2. Funcții în $\mathbb{R}^n$	12
§ 3. Spații metrice. Spații topologice	17
§ 4. Mulțimi compacte	21
§ 5. Mulțimi conexe	23
Cap. II. Funcții în $\mathbb{R}^k$	25
§ 1. Șiruri de numere în $\mathbb{R}^k$	25
§ 2. Serii numerice în $\mathbb{R}^k$	30
§ 3. Limite de funcții în $\mathbb{R}^k$	41
§ 4. Continuitatea funcțiilor în $\mathbb{R}^k$	43
§ 5. Funcții cu variație mărginită	48
§ 6. Interpolarea funcțiilor	51
Cap. III. Calcul diferențial în $\mathbb{R}^k$	59
§ 1. Derivate pentru funcții definite în $\mathbb{R}$. Formula lui Taylor	59
§ 2. Calculul diferențial al funcțiilor vectoriale de variabilă vectorială	65
§ 3. Funcții implicite	83
§ 4. Dependența funcțională	88
§ 5. Extreme condiționate	92
§ 6. Transformări punctuale în $\mathbb{R}^n$	97
Cap. IV. Șiruri și serii de funcții	109
§ 1. Șiruri de funcții	109
§ 2. Serii de funcții. Serii de puteri	115
Cap. V. Integrala Riemann Stieltjes	128
§ 1. Definiția integralei Riemann Stieltjes	128
§ 2. Aplicații geometrice și mecanice ale integralei	154
§ 3. Metode numerice de integrare	161
§ 4. Integrala Lebesgue	173
§ 5. Măsura Lebesgue	181
§ 6. Integrale cu parametru	184

Cap. VI. Integrale improprii	192
§ 1. Definiții și proprietăți ale integralelor improprii	192
§ 2. Integrale improprii din funcții pozitive	199
§ 3. Integrale improprii din funcții de semn variabile	204
§ 4. Integrale improprii și serii numerice	206
§ 5. Convergența integralelor improprii în sensul valorii principale	210
§ 6. Integrale improprii cu parametru	212
§ 7. Integralele lui Euler	216
Cap. VII. Integrale curbilinii	223
§ 1. Drumuri	223
§ 2. Drumuri rectificabile	224
§ 3. Drumuri echivalente, curbă	226
§ 4. Integrala curbilinie de primul tip	231
§ 5. Calculul integralei curbilinii de primul tip	233
§ 6. Masa și centrul de greutate ale unui fir material	237
§ 7. Integrala curbilinie de al doilea tip	238
§ 8. Calculul integralei curbilinii de al doilea tip	243
§ 9. Independența de drum a integralei curbilinii	245
Cap. VIII. Integrale duble	254
§ 1. Definiția integralei duble	254
§ 2. Criterii de integrabilitate	259
§ 3. Proprietățile integralei duble	261
§ 4. Calculul integralei duble	263
§ 5. Formula lui Riemann Green	274
§ 6. Schimbarea de variabile la integrala dublă	280
§ 7. Integrale duble improprii	286
§ 8. Aplicații ale integralei duble	293
Cap. IX. Integrale de suprafață	299
§ 1. Aria unei suprafețe	299
§ 2. Integrala de suprafață de primul tip	306
§ 3. Integrala de suprafață de al doilea tip	310
§ 4. Formula lui Stokes	315
Cap. X. Integrale triple	322
§ 1. Definiția integralei triple	322
§ 2. Calculul integralei triple	325
§ 3. Formula lui Gauss-Ostrogradsky	331
§ 4. Schimbarea de variabilă la integrala triplă	334
§ 5. Aplicații ale integralei triple	337

Cap. VI. Ecuații diferențiale de ordinul întâi	343
§ 1. Introducere	343
§ 2. Ecuații cu variabile separabile	346
§ 3. Ecuații omogene	348
§ 4. Ecuații reductibile la ecuații omogene	350
§ 5. Ecuații liniare	351
§ 6. Ecuații diferențiale Bernoulli	353
§ 7. Ecuații diferențiale Ricatti	354
§ 8. Ecuații cu diferențiale totale exacte	356
§ 9. Ecuații de forma $F(x, y, y') = 0$	360
§ 10. Ecuații de forma $F(x, y') = 0$	361
§ 11. Ecuații de forma $F(y, y') = 0$	362
§ 12. Ecuații Lagrange	363
§ 13. Ecuații Clairaut	365
§ 14. Problema traiectoriilor în plan	366
Cap. XII. Teoreme de existență	371
§ 1. Teorema de existență pentru ecuații diferențiale de ordinul întâi	371
§ 2. Soluția generală a unei ecuații diferențiale	378
§ 3. Teorema de existență pentru sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întâi	380
§ 4. Teorema de existență pentru ecuații diferențiale de ordinul n	384
§ 5. Metoda Runge-Kutta	385
Cap. XIII. Ecuații diferențiale de ordinul n integrabile prin cuadraturi	389
§ 1. Ecuații de forma $y^{(n)} = f(x)$	389
§ 2. Ecuații de forma $F(x, y^{(n)}) = 0$	390
§ 3. Ecuații de forma	
$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	391
§ 4. Ecuații de forma $F(y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$	392
§ 5. Ecuații de forma $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$	393
§ 6. Ecuații de forma $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	393
§ 7. Ecuații de forma $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$	394
Cap. XIV. Ecuații diferențiale de ordinul n liniare	397
§ 1. Considerații generale. Dependență liniară	397
§ 2. Soluția generală a ecuației $L(y) = 0$	401
§ 3. Soluția generală a ecuației $L(y) = f(x)$	404
§ 4. Ecuații diferențiale liniare omogene cu coeficienți constanți	409
§ 5. Ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți neomogene	415
§ 6. Ecuația diferențială a lui Euler	420
Cap. XV. Sisteme de ecuații diferențiale	425
§ 1. Considerații generale	425
§ 2. Sisteme de ecuații diferențiale liniare	426
§ 3. Soluția generală a sistemelor omogene $y' = A(x)y$	430
§ 4. Soluția generală a sistemului $y' = A(x)y + f(x)$	433
§ 5. Sisteme de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți și omogene	436
§ 6. Studiul sistemelor cu ajutorul funcțiilor de matrice	444

Cap. XVI. Integrale prime	458
§ 1. Considerații generale	458
§ 2. Sisteme simetrice	461
§ 3. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare și omogene	464
§ 4. Problema lui Cauchy pentru ecuații cu derivate parțiale de ordin I lineare și omogene.....	468
§ 5. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare	470
Cap. XVII. Stabilitatea soluțiilor ecuațiilor diferențiale	476
§ 1. Considerații generale	476
§ 2. Teorema de stabilitate a lui Leapunov	479
§ 3. Teorema de stabilitate asimptotică a lui Leapunov	482
§ 4. Stabilitatea în prima aproximație	485

*Plan editură Nr. 5935 Coli de tipar 31 Bun de tipar
mai 1980*



Tiparul executat sub comanda
nr. 918
Intreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918”,
str. Grigore Alexandrescu nr. 89—97
București,
Republica Socialistă România